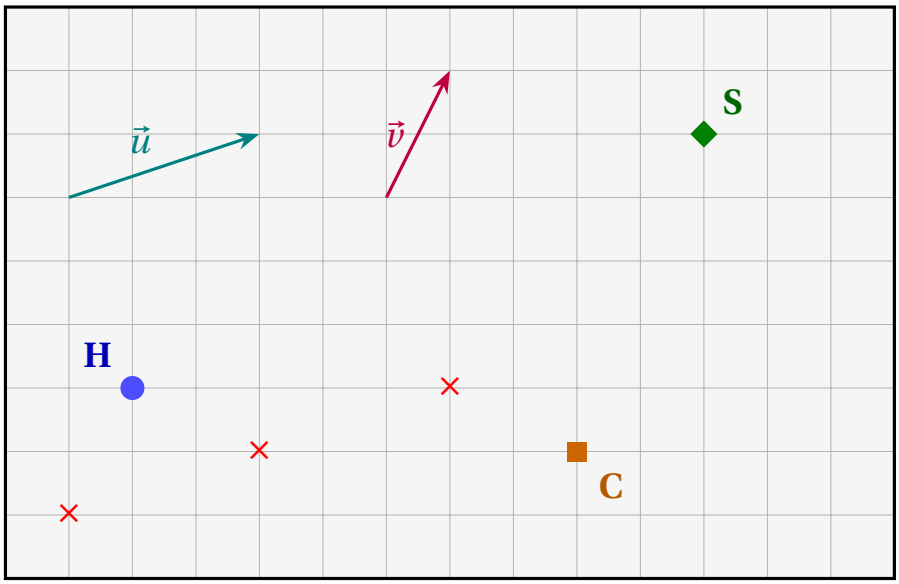
Construction de vecteurs
Problème de recherche : le donjon des deux sorts

Dans un jeu vidéo vu de dessus, le héros se déplace de nœud en nœud sur le quadrillage du donjon. Il ne peut pas marcher : il ne se déplace qu'en lançant l'un de ses deux sorts de téléportation, représentés par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous.

— Chaque sort peut être lancé autant de fois que l'on veut, dans le sens de la flèche ou dans le sens contraire (le héros se déplace alors de $-\vec{u}$ ou de $-\vec{v}$).

— Le héros ne doit jamais atterrir sur un piège (×) ni sortir du donjon.



H : position de départ du héros **C** : coffre au trésor **S** : sortie du donjon

Les questions

1. Le héros peut-il ouvrir le coffre C ? Si oui, en lançant le moins de sorts possible, et dans quel ordre ?
2. Le héros peut-il atteindre la sortie S ?
3. Quels nœuds du donjon le héros peut-il atteindre ?

Défi du concepteur du jeu

On veut ajouter un troisième sort $\vec{w}$ pour que le héros puisse atteindre n'importe quel nœud du donjon. Proposer un sort $\vec{w}$ qui convient et justifier.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvre qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

D'autres démarches sont possibles : ce qui compte, c'est que chaque affirmation soit justifiée.

1. Le coffre C

On cherche à écrire $\overrightarrow{HC}$ comme une somme de vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $-\vec{u}$, $-\vec{v}$. Sur le quadrillage, $\overrightarrow{HC}$ correspond à 7 carreaux vers la droite et 1 vers le bas.
On trace depuis H la droite de direction $\vec{u}$ et depuis C la droite de direction $\vec{v}$: elles se coupent au nœud (11 ; 6) (règle du parallélogramme ; on repère ici les nœuds par leur colonne et leur ligne depuis le coin inférieur gauche du donjon). On lit alors :

$$\overrightarrow{HC} = 3\vec{u} - 2\vec{v}.$$

En effet, $3\vec{u}$ fait 9 carreaux vers la droite et 3 vers le haut, puis $-2\vec{v}$ fait 2 carreaux vers la gauche et 4 vers le bas : au total, 7 vers la droite et 1 vers le bas.
Le moins de sorts possible. Si on avait aussi $\overrightarrow{HC} = a\vec{u} + b\vec{v}$, alors $(a-3)\vec{u} = (-2-b)\vec{v}$. Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, cela impose $a = 3$ et $b = -2$: la décomposition est unique. Quel que soit le trajet, il faut donc au total « 3 sorts $\vec{u}$ de plus que de sorts $-\vec{u}$ » et « 2 sorts $-\vec{v}$ de plus que de sorts $\vec{v}$ » : il faut au moins **5 sorts**.
L'ordre. L'ordre ne change pas l'arrivée (on peut additionner des vecteurs dans n'importe quel ordre), mais il change les nœuds visités. Sur les 10 ordres possibles, un sort de la grille et les autres passent par un piège. Un seul ordre convient :

$$\vec{u},\ \vec{u},\ \vec{u},\ -\vec{v},\ -\vec{v}$$

Nœuds visités : (5 ; 4), (8 ; 5), (11 ; 6), (10 ; 4), puis C(9 ; 2).

2. La sortie S

En explorant, on n'arrive jamais sur S. Pour le prouver, on numérote chaque nœud : si le nœud est à d carreaux à droite et h carreaux au-dessus de H (comptés négativement à gauche ou en dessous), on lui associe le nombre $N = d - 3h$.

- Le sort $\vec{u}$ ajoute 3 à d et 1 à h : N change de $3 - 3 \times 1 = 0$.
- Le sort $\vec{v}$ ajoute 1 à d et 2 à h : N change de $1 - 3 \times 2 = -5$.

Au départ, $N = 0$. Chaque sort ajoute ou retire 0 ou 5 : N **reste toujours un multiple de 5**. Or S est à 9 carreaux à droite et 4 au-dessus de H : $N = 9 - 12 = -3$, qui n'est pas un multiple de 5. **La sortie est inaccessible** : le jeu est bogué !

3. Les nœuds accessibles

Les nœuds accessibles sont exactement ceux pour lesquels $d - 3h$ est un multiple de 5. Si on colorie les nœuds selon le reste de $d - 3h$ dans la division par 5, on obtient 5 couleurs disposées en diagonales régulières, et le héros reste toujours sur la même couleur : il atteint **un nœud sur cinq**.

Réciproquement, si $d-3h=5k$, on vérifie que $\left(\frac{2d-h}{5}\right)\vec{u}+\left(\frac{3h-d}{5}\right)\vec{v}$ fait le bon déplacement, avec des coefficients entiers (à condition de pouvoir contourner les pièges et les bords).

Défi

Il suffit d'un sort qui change le nombre N d'une valeur non multiple de 5. Par exemple $\vec{w}$ = « 1 carreau vers la droite » : avec $\vec{w}$ et $\vec{u}-3\vec{w}$ (« 1 carreau vers le haut »), on peut aller partout.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Somme de vecteurs, règle du parallélogramme, relation de Chasles.
— Produit d'un vecteur par un réel, vecteurs opposés, colinéarité.
— Lien avec l'arithmétique : multiples (chapitre 2).

Pour aller plus loin (enrichissement, hors programme)

L'ensemble des points atteignables s'appelle un *réseau*. Le nombre de couleurs (5) est égal à $3\times 2-1\times 1$, calculé avec les déplacements de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: c'est le *déterminant*, que l'on retrouve en Seconde au chapitre « Vecteurs et coordonnées ». Les réseaux servent en cristallographie et dans certains systèmes de chiffrement récents.