Succession d'épreuves et loi binomiale
Problème de recherche : le surbooking

Un avion compte 200 sièges. Une compagnie sait que chaque passager ayant acheté un billet se présente à l'embarquement avec une probabilité de 0,95, indépendamment des autres. Pour ne pas voler avec des sièges vides, elle vend n billets avec $n \geqslant 200$ (c'est le *surbooking*).
Un billet rapporte 150 € (non remboursé en cas d'absence). Chaque passager qui se présente sans pouvoir embarquer coûte 600 € à la compagnie (indemnité et nouveau vol).

La mission

1. La compagnie vend 210 billets. Quelle est la probabilité que des passagers restent à quai ?
2. La compagnie veut que le risque de laisser au moins un passager à quai ne dépasse pas 5 %. Combien de billets peut-elle vendre au maximum ?
3. Quel nombre de billets maximise le gain moyen de la compagnie sur un vol ?

Pour aller plus loin

Les deux critères (risque et gain moyen) donnent-ils la même réponse ? Lequel choisirait un service client ? Un service financier ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Avec 210 billets

Soit X le nombre de passagers qui se présentent. Les 210 passagers se présentent ou non indépendamment, avec la même probabilité : X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(210\,;0{,}95)$. Des passagers restent à quai si $X > 200$:

$$P(X > 200) = 1 - P(X \leqslant 200) \approx 0{,}393.$$

Près de **4 vols sur 10** laisseraient des passagers à quai : c'est beaucoup trop.

2. Risque inférieur à 5 %

Avec $X_n \sim \mathscr{B}(n\,;0{,}95)$, on calcule $P(X_n > 200)$ à la calculatrice :

n	202	203	204	205	206	207
$P(X_n > 200)$	0,0004	0,002	0,008	0,022	0,052	0,104

La probabilité augmente avec n ; elle dépasse 5 % à partir de $n = 206$. La compagnie peut vendre au maximum **205 billets**.

3. Gain moyen

Le gain est $G_n = 150n - 600\,R_n$, où $R_n = \max(X_n - 200\,;0)$ est le nombre de passagers laissés à quai. Par linéarité, $E(G_n) = 150n - 600\,E(R_n)$ avec $E(R_n) = \sum_{k=201}^{n}(k - 200)\,P(X_n = k)$ (calcul au tableur) :

n	200	205	207	208	209	210
$E(R_n)$	0	0,032	0,184	0,358	0,628	1,006
$E(G_n)$ (€)	30 000	30 731	30 940	**30 985**	30 974	30 896

Le gain moyen est maximal pour **208 billets** (environ 30 985 €, soit 985 € de plus qu'en vendant exactement 200 billets).

Pour aller plus loin

Non : 208 billets maximisent le gain moyen, mais le risque de laisser quelqu'un à quai est alors d'environ 18 %. Un service client (image de marque) préférera 205 billets ou moins ; un service financier, 208. En pratique, les compagnies ajustent aussi l'indemnité (proposer un bon d'achat aux volontaires coûte moins cher).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Reconnaître un schéma de Bernoulli et une loi binomiale ; calculer $P(X > k)$.
— Espérance et linéarité ; recherche d'un seuil par tableau de valeurs.