Succession d'épreuves et loi binomiale
Problème de recherche : les paris du chevalier de Méré

Au XVIIe siècle, le chevalier de Méré, grand joueur, proposait deux paris :

— **pari A** : obtenir au moins un six en lançant 4 fois un dé ;

— **pari B** : obtenir au moins un double six en lançant 24 fois deux dés.

Il pensait que les deux paris étaient équivalents, car $\frac{4}{6} = \frac{24}{36}$. Pourtant, il gagnait avec le pari A et perdait avec le pari B.

La mission

1. Calculer la probabilité de gagner chacun des deux paris. Le chevalier avait-il raison de s'étonner ?
2. Combien de lancers de deux dés faut-il au minimum pour que le pari B devienne favorable au joueur ?
3. En 1693, Samuel Pepys a demandé à Isaac Newton lequel de ces événements est le plus probable : obtenir au moins un six avec 6 dés ; au moins deux six avec 12 dés ; au moins trois six avec 18 dés. Répondre à sa question.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Les deux paris

Pari A. Le nombre de six X suit la loi $\mathscr{B}\left(4;\frac{1}{6}\right)$. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx$ **0,518** : le pari est favorable.

Pari B. Le nombre de doubles six Y suit la loi $\mathscr{B}\left(24;\frac{1}{36}\right)$. $P(Y \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx$ **0,491** : le pari est défavorable.

Le raisonnement « $\frac{4}{6} = \frac{24}{36}$ » est faux : il revient à additionner les probabilités de gagner à chaque lancer, alors que les événements « six au 1er lancer », « six au 2e lancer »… ne sont pas incompatibles. L'écart est faible (environ 2,7 points), mais un joueur régulier le ressent sur ses gains.

2. Le seuil

On cherche le plus petit n tel que $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > \frac{1}{2}$. La calculatrice donne $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}509$ et $\left(\frac{35}{36}\right)^{25} \approx 0{,}494$: il faut **25 lancers**.

3. La question de Pepys

Avec $X_n \sim \mathscr{B}\left(n;\frac{1}{6}\right)$:

- $P(X_6 \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}665$;
- $P(X_{12} \geqslant 2) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0{,}619$;
- $P(X_{18} \geqslant 3) = 1 - P(X_{18} \leqslant 2) \approx 0{,}597$ (calculatrice).

Le premier événement est le plus probable : c'est la réponse que Newton a donnée à Pepys.

Enrichissement historique : la question du chevalier de Méré est à l'origine de la correspondance de 1654 entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat, considérée comme l'un des débuts du calcul des probabilités.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Modéliser par un schéma de Bernoulli ; loi binomiale.
- Passage à l'événement contraire ; recherche d'un seuil.