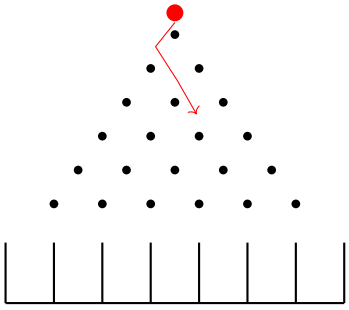
Succession d'épreuves et loi binomiale
Problème de recherche : la planche de Galton

Une planche de Galton comporte 10 rangées de clous. Une bille lâchée en haut rencontre un clou à chaque rangée et part à droite ou à gauche avec la même probabilité, indépendamment d'une rangée à l'autre. En bas, elle tombe dans l'une des cases numérotées de 0 à 10 : le numéro de la case est le nombre de fois où elle est partie à droite.



La mission

1. On note X le numéro de la case. Justifier que X suit une loi binomiale. Quelle est la case la plus probable, et avec quelle probabilité ?
2. Écrire un programme qui simule la chute de 1 000 billes et affiche le nombre de billes dans chaque case. Comparer avec les valeurs $1\,000 \times P(X = k)$.
3. Quelle est la probabilité qu'une bille tombe dans l'une des cases centrales, de 3 à 7 ?
4. On penche la planche : chaque bille part maintenant à droite avec la probabilité 0,6. Avec le programme, puis par le calcul, déterminer la case la plus probable.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. La loi de X

Chaque rangée est une épreuve de Bernoulli (succès : « à droite », $p = \frac{1}{2}$), et les 10 épreuves sont indépendantes. X compte les succès : $X \sim \mathscr{B}\left(10;\frac{1}{2}\right)$ et $P(X=k) = \binom{10}{k}\frac{1}{2^{10}}$. Le plus grand coefficient est $\binom{10}{5} = 252$: la case 5 est la plus probable, avec $P(X=5) = \frac{252}{1\,024} \approx 0{,}246$.

2. Simulation

```
from random import random
cases = [0] * 11
for _ in range(1000):
    k = 0
    for rangee in range(10):
        if random() < 0.5:
            k = k + 1
    cases[k] = cases[k] + 1
print(cases)
```

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$1\,000\,P(X=k)$	1	10	44	117	205	246	205	117	44	10	1

Les effectifs simulés fluctuent autour de ces valeurs : on voit apparaître une « cloche » symétrique.

3. Les cases centrales

$P(3 \leqslant X \leqslant 7) = 1 - 2 \times \frac{1+10+45}{1\,024} = \frac{912}{1\,024} \approx \mathbf{0{,}891}$.

4. La planche penchée

$X \sim \mathscr{B}(10;0{,}6)$ et $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{\binom{10}{k+1}}{\binom{10}{k}} \times \frac{0{,}6}{0{,}4} = \frac{10-k}{k+1} \times 1{,}5$. Ce quotient dépasse 1 si et seulement si $15 - 1{,}5k > k+1$, c'est-à-dire $k < 5{,}6$. Les probabilités augmentent jusqu'à $k = 6$ puis diminuent : la case la plus probable est la **case 6**, avec $P(X=6) \approx 0{,}251$.

Enrichissement historique : cette planche a été imaginée par le scientifique britannique Francis Galton, à la fin du XIXe siècle, pour illustrer la répartition en cloche des résultats aléatoires.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Reconnaître une loi binomiale ; coefficients binomiaux.
- Simuler une succession d'épreuves avec Python.