Combinatoire et dénombrement
Problème de recherche : le Père Noël secret raté

n amis ($n \geqslant 2$) organisent un « Père Noël secret » : chacun écrit son nom sur un papier, les papiers sont mélangés, puis chacun tire un papier au hasard et fera un cadeau à la personne dont il a tiré le nom. Le tirage est raté si au moins une personne tire son propre nom.
On note D_n le nombre de tirages réussis parmi les $n!$ tirages possibles (tous équiprobables).

La mission

1. Pour $n = 3$, écrire tous les tirages possibles. Calculer D_3 et la probabilité de réussite.
2. Calculer D_4 et la probabilité de réussite pour 4 amis.
3. Justifier que, pour $n \geqslant 3$, $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$. Calculer D_5, puis la probabilité de réussite pour 5, 6 et 10 amis.
4. Comparer ces probabilités avec $\frac{1}{e}$. Que constate-t-on ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Trois amis

On note $(x\,;y\,;z)$ les noms tirés par A, B, C. Les 6 tirages sont $(A\,;B\,;C)$, $(A\,;C\,;B)$, $(B\,;A\,;C)$, $(B\,;C\,;A)$, $(C\,;A\,;B)$, $(C\,;B\,;A)$. Seuls $(B\,;C\,;A)$ et $(C\,;A\,;B)$ sont réussis : $D_3 = 2$, probabilité $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2. Quatre amis

A tire B, C ou D (3 choix, symétriques). Si A tire B : soit B tire A, et C, D doivent s'échanger leurs noms (1 tirage) ; soit B ne tire pas A, et il reste 2 possibilités ($BCDA$ et $BDAC$ en notation abrégée). Cela fait 3 tirages pour chaque choix de A : $D_4 = 9$, probabilité $\frac{9}{24} = 0{,}375$.

3. La récurrence

La personne 1 tire le nom d'une personne $k \neq 1$: $n-1$ choix. Ensuite :

- si k tire le nom de 1, les $n-2$ autres doivent faire un tirage réussi entre eux : D_{n-2} possibilités ;
- sinon, on considère que le papier « 1 » est interdit à k comme si c'était son propre nom : on a un tirage réussi entre $n-1$ personnes, D_{n-1} possibilités.

D'où $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$, avec $D_1 = 0$ et $D_2 = 1$.

n	3	4	5	6	7	10
D_n	2	9	44	265	1 854	1 334 961
$D_n/n!$	0,333 3	0,375 0	0,366 7	0,368 1	0,367 9	0,367 879 4

4. Le nombre $\frac{1}{\mathrm{e}}$

$\frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}367\,879\,4$: dès 7 amis, la probabilité de réussite coïncide avec $\frac{1}{\mathrm{e}}$ à 10^{-4} près, et elle ne dépend presque plus de n. Un tirage sur trois environ est réussi : mieux vaut prévoir de recommencer.

Enrichissement historique : ce problème des « rencontres » a été étudié par Pierre Rémond de Montmort en 1708. La formule exacte est

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Dénombrer des permutations ; principes additif et multiplicatif.
- Dénombrer pour calculer des probabilités.