Combinatoire et dénombrement
Problème de recherche : le triangle de Pascal en noir et blanc

On s'intéresse à la parité des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ du triangle de Pascal.

La mission

1. Écrire un programme Python qui affiche les lignes 0 à 31 du triangle de Pascal, en remplaçant chaque nombre impair par le caractère # et chaque nombre pair par un espace. Décrire la figure obtenue.
2. Compter les nombres impairs sur chaque ligne n, pour n de 0 à 16. Que remarque-t-on pour les lignes $1, 3, 7, 15$? pour les lignes $2, 4, 8, 16$? Quelles valeurs prend ce nombre ?
3. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\binom{2n}{n}$ est pair.
4. Calculer le nombre total de coefficients impairs dans les lignes 0 à $2^k - 1$, pour $k = 1, 2, 3, 4$. Conjecturer une formule. Que peut-on dire de la proportion de nombres impairs dans ces lignes quand k augmente ?

Pour aller plus loin

Démontrer que $j\binom{N}{j} = N\binom{N-1}{j-1}$ pour $1 \leqslant j \leqslant N$. En déduire que, pour $N = 2^k$, tous les coefficients $\binom{N}{j}$ avec $0 < j < N$ sont pairs.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !