Combinatoire et dénombrement
Problème de recherche : le triangle de Pascal en noir et blanc

On s'intéresse à la parité des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ du triangle de Pascal.

La mission

1. Écrire un programme Python qui affiche les lignes 0 à 31 du triangle de Pascal, en remplaçant chaque nombre impair par le caractère # et chaque nombre pair par un espace. Décrire la figure obtenue.
2. Compter les nombres impairs sur chaque ligne n, pour n de 0 à 16. Que remarque-t-on pour les lignes $1, 3, 7, 15$? pour les lignes $2, 4, 8, 16$? Quelles valeurs prend ce nombre ?
3. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\binom{2n}{n}$ est pair.
4. Calculer le nombre total de coefficients impairs dans les lignes 0 à $2^k - 1$, pour $k = 1, 2, 3, 4$. Conjecturer une formule. Que peut-on dire de la proportion de nombres impairs dans ces lignes quand k augmente ?

Pour aller plus loin

Démontrer que $j\binom{N}{j} = N\binom{N-1}{j-1}$ pour $1 \leqslant j \leqslant N$. En déduire que, pour $N = 2^k$, tous les coefficients $\binom{N}{j}$ avec $0 < j < N$ sont pairs.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. La figure

```
ligne = [1]
for n in range(32):
    print(' ' * (32 - n) + ' '.join('#' if c % 2 else ' ' for c in ligne))
    ligne = [1] + [ligne[k] + ligne[k + 1] for k in range(n)] + [1]
```

On voit un grand triangle formé de trois triangles, chacun formé de trois triangles plus petits, et ainsi de suite, avec des « trous » triangulaires : c'est le **triangle de Sierpiński**.

2. Le nombre d'impairs par ligne

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
impairs	1	2	2	4	2	4	4	8	2	4	4	8	4	8	8	16	2

Les lignes 2^k-1 ne contiennent que des nombres impairs ; les lignes 2^k n'en contiennent que deux (les 1 des bords). Le nombre d'impairs est toujours une **puissance de 2**. Enrichissement : c'est 2^s, où s est le nombre de chiffres 1 dans l'écriture binaire de n (conséquence d'un théorème d'Édouard Lucas, 1878).

3. Les coefficients centraux

$\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n}$, et par symétrie $\binom{2n-1}{n} = \binom{2n-1}{n-1}$. Donc $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$ est pair.

4. Le total

Lignes 0 à 1 : 3 ; 0 à 3 : 9 ; 0 à 7 : 27 ; 0 à 15 : 81. On conjecture 3^k. Ces lignes contiennent $1+2+\cdots+2^k = \frac{2^k(2^k+1)}{2}$ nombres, et la proportion d'impairs, de l'ordre de $2\times\left(\frac{3}{4}\right)^k$, tend vers 0 : presque tous les coefficients sont pairs.

Pour aller plus loin

$j\binom{N}{j} = j\frac{N!}{j!(N-j)!} = N\frac{(N-1)!}{(j-1)!(N-j)!} = N\binom{N-1}{j-1}$. Pour $N=2^k$ et $0<j<2^k$: 2^k divise $j\binom{N}{j}$, alors que $j<2^k$ contient au plus $k-1$ facteurs 2. Il reste au moins un facteur 2 dans $\binom{N}{j}$: il est pair.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Coefficients binomiaux ; relation et triangle de Pascal ; symétrie.

— Formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.