Continuité
Problème de recherche : le moine et la montagne

Énigme classique. Un moine part du pied d'une montagne à 6 h et arrive au sommet à 18 h, en suivant un unique sentier. Il marche à son rythme : il accélère, ralentit, s'arrête pour méditer. Le lendemain, il part du sommet à 6 h et redescend par le même sentier, arrivant en bas à 18 h, à un rythme tout aussi irrégulier.

La mission

1. Existe-t-il un endroit du sentier où le moine se trouve exactement à la même heure les deux jours ? Justifier.
2. Une coureuse parcourt 10 km en exactement 50 minutes, à vitesse variable. Existe-t-il forcément une portion de 5 km parcourue en exactement 25 minutes ?

Pour aller plus loin

Même question avec une portion de 2,5 km parcourue en exactement 12,5 minutes. Puis avec une portion de 3 km parcourue en exactement 15 minutes : la réponse est-elle encore oui ? (On pourra chercher une course « bizarre ».)

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le moine

Notons L la longueur du sentier, $m(t)$ la distance (le long du sentier) entre le pied et le moine à l'heure t le premier jour, et $d(t)$ cette distance le second jour, pour $t \in [6;18]$. Un marcheur ne se téléporte pas : m et d sont **continues**.
Posons $f(t) = m(t) - d(t)$, continue sur $[6;18]$. On a $f(6) = 0 - L = -L < 0$ et $f(18) = L - 0 = L > 0$. D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe $t_0 \in [6;18]$ tel que $f(t_0) = 0$, c'est-à-dire $m(t_0) = d(t_0)$: à l'heure t_0, le moine est au même endroit les deux jours. **Oui**, un tel endroit existe toujours (on ne sait pas où, ni à quelle heure).
Image parlante : faire marcher deux moines le même jour, l'un montant, l'autre descendant ; ils se croisent forcément.

2. La coureuse

Soit $x(t)$ la distance parcourue (en km) au temps t (en min), continue sur $[0;50]$, avec $x(0) = 0$ et $x(50) = 10$. Posons, pour $t \in [0;25]$:

$$g(t) = x(t+25) - x(t) - 5$$

(distance parcourue pendant les 25 minutes qui suivent t, moins 5). g est continue et

$$g(0) + g(25) = x(25) - 0 - 5 + x(50) - x(25) - 5 = 10 - 10 = 0.$$

Donc $g(0)$ et $g(25)$ sont opposés : soit l'un est nul, soit ils sont de signes contraires et le TVI donne $t_0 \in [0;25]$ avec $g(t_0) = 0$. **Oui** : il existe une portion de 5 km parcourue en exactement 25 minutes.

Pour aller plus loin (enrichissement)

Pour 2,5 km en 12,5 min : $h(t) = x(t+12{,}5) - x(t) - 2{,}5$ sur $[0;37{,}5]$ vérifie $h(0) + h(12{,}5) + h(25) + h(37{,}5) = 0$; ces quatre nombres ne peuvent pas être tous strictement du même signe, et le TVI conclut : **oui**. Le même raisonnement marche pour toute fraction $\frac{1}{n}$ du parcours.
Pour 3 km en 15 min, la réponse est **non** en général : c'est le *théorème de la corde universelle* (Paul Lévy, 1934), qui affirme que seules les fractions $\frac{1}{n}$ sont garanties. Un contre-exemple existe, avec une course qui alterne accélérations et reculs (la coureuse fait demi-tour par moments).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Continuité d'une fonction ; théorème des valeurs intermédiaires.
- Technique : introduire une fonction auxiliaire (une différence) qui change de signe.