Continuité
Problème de recherche : le coureur et la demi-heure

Un coureur parcourt 10 km en exactement une heure. Sa vitesse n'est pas constante : il accélère, ralentit, s'arrête parfois. On note $f(t)$ la distance parcourue (en km) au bout de t heures ; on admet que f est continue sur $[0;1]$, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 10$.

La mission

1. Démontrer qu'il existe une période d'une demi-heure pendant laquelle le coureur a parcouru exactement 5 km.
2. Démontrer qu'il existe une période de 20 minutes pendant laquelle il a parcouru exactement $\frac{10}{3}$ km.
3. Généraliser à une durée de $\frac{1}{n}$ heure, avec n entier, $n \geqslant 2$.

Pour aller plus loin

On admet que la température en un point de l'équateur dépend de façon continue de la longitude θ (en radians) de ce point : $T(\theta)$, avec $T(\theta + 2\pi) = T(\theta)$. Démontrer qu'à tout instant, il existe deux points diamétralement opposés de l'équateur qui ont exactement la même température.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !