Dérivation et convexité
Problème de recherche : la courbe de popularité d'un jeu

Un studio lance un nouveau jeu en ligne. Le nombre de joueurs inscrits, en milliers, t semaines après le lancement, est modélisé par

$$f(t) = \frac{1\,000}{1 + \mathrm{e}^{-0{,}5(t-6)}}, \qquad t \geqslant 0.$$

La mission

1. Combien de joueurs le jeu peut-il espérer atteindre à long terme ?
2. Le directeur marketing veut lancer une campagne de publicité au moment où les inscriptions sont les plus rapides. Quand ? Combien de nouveaux joueurs par semaine à ce moment ?
3. Montrer que $f'(t) = 0{,}5\, f(t)\left(1 - \dfrac{f(t)}{1\,000}\right)$. Expliquer en une phrase pourquoi ce modèle est réaliste.

Pour aller plus loin

Montrer que $f(6+h) + f(6-h) = 1\,000$ pour tout réel h. Que dit cette relation de la courbe ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Limite

Quand $t \to +\infty$, $-0{,}5(t-6) \to -\infty$ donc $\mathrm{e}^{-0{,}5(t-6)} \to 0$ et $f(t) \to 1\,000$. Le jeu peut espérer environ **un million de joueurs** : c'est le plafond (saturation du marché). Au départ, $f(0) = \frac{1\,000}{1+\mathrm{e}^{3}} \approx 47{,}4$ milliers (inscriptions anticipées).

2. Croissance maximale : point d'inflexion

Posons $u(t) = \mathrm{e}^{-0{,}5(t-6)}$, $u'(t) = -0{,}5u(t)$. Alors

$$f'(t) = \frac{-1\,000\,u'(t)}{(1+u(t))^2} = \frac{500\,u(t)}{(1+u(t))^2} > 0.$$

La vitesse d'inscription est f' ; elle est maximale quand f' est maximale, c'est-à-dire là où f'' s'annule en changeant de signe (point d'inflexion). Le calcul donne

$$f''(t) = \frac{250\,u(t)\big(u(t)-1\big)}{(1+u(t))^3}.$$

$f''(t)$ est du signe de $u(t)-1$: positif si $t<6$ (f convexe), négatif si $t>6$ (f concave). Le point d'inflexion est en $t=6$: **6 semaines après le lancement**, $f(6) = 500$ milliers de joueurs et

$$f'(6) = \frac{500\times 1}{2^2} = 125 \text{ milliers de joueurs par semaine.}$$

3. Une équation différentielle

$1 - \frac{f(t)}{1\,000} = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u}$, donc $0{,}5f(t)\left(1-\frac{f(t)}{1\,000}\right) = 0{,}5 \times \frac{1000}{1+u} \times \frac{u}{1+u} = \frac{500u}{(1+u)^2} = f'(t)$.
Interprétation : la vitesse d'inscription est proportionnelle au nombre de joueurs (bouche-à-oreille) et au nombre de personnes pas encore inscrites (marché restant). C'est le **modèle logistique** (enrichissement), utilisé aussi pour les épidémies ou la diffusion des innovations.

Pour aller plus loin

$f(6+h) = \frac{1\,000}{1+\mathrm{e}^{-0{,}5h}}$ et $f(6-h) = \frac{1\,000}{1+\mathrm{e}^{0{,}5h}} = \frac{1\,000\,\mathrm{e}^{-0{,}5h}}{\mathrm{e}^{-0{,}5h}+1}$. La somme vaut $\frac{1\,000(1+\mathrm{e}^{-0{,}5h})}{1+\mathrm{e}^{-0{,}5h}} = 1\,000$.
La courbe est **symétrique par rapport au point d'inflexion** $I(6;500)$.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Dérivée seconde ; convexité, concavité ; point d'inflexion.
- Interprétation : le point d'inflexion est l'instant où la croissance est la plus rapide.