# Dérivation et convexité
## Problème de recherche : la courbe en cloche

Pour un réel $\sigma > 0$, on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Sa courbe, en forme de cloche, est utilisée en statistique pour décrire la répartition de nombreuses mesures.

### La mission

1. Avec GeoGebra, tracer la courbe pour plusieurs valeurs de $\sigma$. Conjecturer les abscisses de ses points d'inflexion.
2. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Étudier la convexité de $f$ et démontrer la conjecture.
3. Déterminer l'équation de la tangente au point d'inflexion d'abscisse $\sigma$. En quel point coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
4. Comparer la hauteur de la courbe aux points d'inflexion à sa hauteur maximale. Ce rapport dépend-il de $\sigma$ ?

### Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

# Éléments de correction

## 1. Conjecture

GeoGebra place les points d'inflexion en $x = -\sigma$ et $x = \sigma$ : plus $\sigma$ est grand, plus la cloche est large.

## 2. Dérivées et convexité

$f = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = -\frac{x^2}{2\sigma^2}$, $u'(x) = -\frac{x}{\sigma^2}$. Donc $f'(x) = -\frac{x}{\sigma^2} f(x)$, puis

$$f''(x) = -\frac{1}{\sigma^2} f(x) - \frac{x}{\sigma^2} f'(x) = -\frac{1}{\sigma^2} f(x) + \frac{x^2}{\sigma^4} f(x) = \frac{x^2 - \sigma^2}{\sigma^4} f(x).$$

Comme $f(x) > 0$, $f''(x)$ a le signe de $x^2 - \sigma^2$ : $f$ est convexe sur $]-\infty ; -\sigma]$ et sur $[\sigma ; +\infty[$, concave sur $[-\sigma ; \sigma]$. $f''$ s'annule en changeant de signe en $\pm\sigma$ : ce sont les abscisses des **points d'inflexion**.

## 3. La tangente au point d'inflexion

$f(\sigma) = \mathrm{e}^{-1/2}$ et $f'(\sigma) = -\frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-1/2}$. La tangente a pour équation

$$y = -\frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{\sigma}(x - \sigma) + \mathrm{e}^{-1/2} = \mathrm{e}^{-1/2}\left(2 - \frac{x}{\sigma}\right).$$

Elle coupe l'axe des abscisses en $x = 2\sigma$. Par symétrie, l'autre tangente le coupe en $-2\sigma$.

## 4. La hauteur

Le maximum est $f(0) = 1$, et aux points d'inflexion la hauteur vaut $\mathrm{e}^{-1/2} \approx 0{,}61$ : le rapport est **toujours le même**, quel que soit $\sigma$. Toutes ces cloches sont des agrandissements horizontaux d'une même courbe.

Enrichissement : en statistique, $\sigma$ joue le rôle de l'écart type. Cette courbe est liée au nom de Carl Friedrich Gauss, qui l'a utilisée au début du XIX$^{\text{e}}$ siècle pour étudier les erreurs de mesure en astronomie.

## Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Dériver une fonction composée $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$.
- Étudier la convexité ; points d'inflexion.