Géométrie vectorielle dans l'espace
Problème de recherche : la table bancale

Une table rectangulaire a quatre pieds de même longueur. Les extrémités des pieds forment un rectangle de 80 cm sur 60 cm. On pose la table sur un sol de terrasse légèrement irrégulier.
Dans un repère orthonormé de l'espace (unité : 1 cm, axe des cotes vertical), les points du sol où devraient reposer les pieds sont :

$$A(0;0;0), \qquad B(80;0;1), \qquad C(80;60;0{,}5), \qquad D(0;60;0).$$

La mission

1. La table va-t-elle être bancale ? Justifier.
2. On dispose de cales de différentes épaisseurs. Sous quel(s) pied(s) et avec quelle épaisseur faut-il caler pour que la table soit stable, avec ses quatre pieds au contact ?
3. Expliquer pourquoi un tabouret à trois pieds n'est jamais bancal.

Pour aller plus loin

Sans cale, peut-on rendre la table stable en la faisant tourner sur place ? Chercher « théorème de la table bancale ».

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Les quatre points sont-ils coplanaires ?

Les extrémités des pieds forment un rectangle, donc quatre points **coplanaires**. La table est stable seulement si les quatre points du sol sont eux aussi coplanaires (et forment un parallélogramme de bonnes dimensions).
$\overrightarrow{AB}(80;0;1)$, $\overrightarrow{AD}(0;60;0)$, $\overrightarrow{AC}(80;60;0{,}5)$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires. Cherchons x et y tels que $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$:

$$80 = 80x, \qquad 60 = 60y, \qquad 0{,}5 = x.$$

Les deux premières équations donnent $x = 1$ et $y = 1$, mais la troisième donne $x = 0{,}5$: contradiction. Les points A, B, C, D **ne sont pas coplanaires** : la table est bancale (elle bascule entre deux positions, en reposant sur trois pieds).

2. Où caler ?

Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme (donc plan), il faut $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire $A + C = B + D$ en coordonnées. Les abscisses et ordonnées conviennent ; pour les cotes, $z_A + z_C = 0{,}5$ et $z_B + z_D = 1$. Il manque 0,5 cm du côté $A + C$. On ne peut pas creuser le sol, seulement ajouter des cales :

- **une cale de 0,5 cm sous le pied** A (alors $z_A = 0{,}5$) ;
- **ou une cale de 0,5 cm sous le pied** C (alors $z_C = 1$) ;
- ou deux cales sous A et C dont les épaisseurs ont pour somme 0,5 cm.

Vérification avec une cale sous A : $A'(0;0;0{,}5)$, $\overrightarrow{A'B}(80;0;0{,}5)$ et $\overrightarrow{DC}(80;0;0{,}5)$ sont égaux. Caler B ou D aggraverait le défaut.

3. Le tabouret

Trois points non alignés définissent toujours un plan : les trois pieds touchent toujours le sol en même temps. Le tabouret peut être penché, mais jamais bancal. Avec quatre pieds, le quatrième point n'a aucune raison d'être dans le plan des trois autres.

Pour aller plus loin (enrichissement)

Le « théorème de la table bancale » affirme que, sur un sol continu pas trop pentu, on peut toujours stabiliser une table carrée en la tournant d'au plus un quart de tour autour de son centre. La preuve utilise le théorème des valeurs intermédiaires (chapitre Continuité) ; pour une table rectangulaire, un résultat analogue existe mais il est plus difficile.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Coordonnées de vecteurs dans l'espace ; combinaison linéaire ; vecteurs coplanaires.
- Caractérisation d'un parallélogramme par l'égalité de vecteurs.