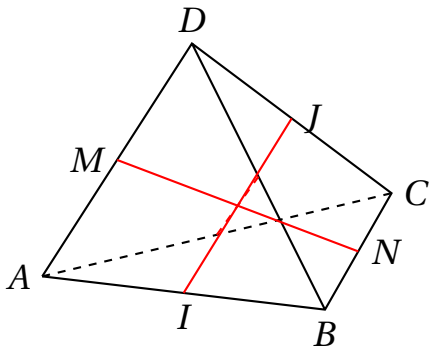
Géométrie vectorielle dans l'espace
Problème de recherche : les trois baguettes

Un sculpteur a fabriqué un tétraèdre $ABCD$ en fil de fer. Il veut le décorer avec trois baguettes rigides :

— la première relie le milieu I de $[AB]$ au milieu J de $[CD]$;
— la deuxième relie le milieu K de $[AC]$ au milieu L de $[BD]$;
— la troisième relie le milieu M de $[AD]$ au milieu N de $[BC]$.



La mission

1. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$, où G est le milieu de $[IJ]$.

2. Les trois baguettes se touchent-elles ? Si oui, en quel point de chacune ?

Pour aller plus loin

On note A' le centre de gravité du triangle BCD. Montrer que G appartient au segment $[AA']$ et préciser sa position. Que peut-on en déduire pour les segments qui joignent chaque sommet au centre de gravité de la face opposée ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le milieu de $[IJ]$

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et, J étant le milieu de $[CD]$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$. Comme G est le milieu de $[IJ]$:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right).$$

2. Un point commun

Le milieu G' de $[KL]$ vérifie $\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$, donc $G' = G$. De même, le milieu de $[MN]$ vérifie $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\right)$: c'est encore G.

Les trois baguettes **se coupent en un même point G, qui est le milieu de chacune**.

(Autre preuve : $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{LJ}$, donc $IKJL$ est un parallélogramme, dont les diagonales $[IJ]$ et $[KL]$ ont le même milieu.)

Pour aller plus loin

A' est le centre de gravité de BCD : $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$. Donc $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$: G est sur $[AA']$, aux trois quarts en partant de A. Le même calcul depuis chaque sommet montre que les quatre segments joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée passent tous par G.

Enrichissement : G est le centre de gravité (ou isobarycentre) du tétraèdre ; un tétraèdre plein et homogène tient en équilibre sur une pointe placée en G.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Calculer avec des vecteurs de l'espace ; relation de Chasles.
- Caractérisation vectorielle du milieu et du centre de gravité.