Calcul intégral
Problème de recherche : la recharge de la voiture électrique

Une voiture électrique est branchée sur une borne de recharge rapide. Pour protéger la batterie, la puissance de charge diminue au fil du temps : t minutes après le branchement, elle vaut

$$P(t) = 50\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} \quad \text{(en kW)}.$$

L'énergie reçue (en kWh) entre les instants 0 et T (en minutes) est $E(T) = \dfrac{1}{60}\displaystyle\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t$ (on divise par 60 car t est en minutes).
La batterie a une capacité de 60 kWh ; au branchement, elle est chargée à 20 %.

La mission

1. Quelle énergie la voiture reçoit-elle pendant une pause café de 30 minutes ?
2. Combien de temps faut-il pour atteindre 80 % de charge ?
3. Le conducteur veut recharger à 100 %. Est-ce possible sur cette borne ?

Pour aller plus loin

Calculer la puissance moyenne de charge pendant la première heure. Pourquoi les constructeurs conseillent-ils de s'arrêter à 80 % lors d'un long trajet ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Une primitive

Une primitive de $t \mapsto 50\,\mathrm{e}^{-0{,}02t}$ est $t \mapsto \frac{50}{-0{,}02}\mathrm{e}^{-0{,}02t} = -2\,500\,\mathrm{e}^{-0{,}02t}$. Donc

$$E(T) = \frac{1}{60}\Big[-2\,500\,\mathrm{e}^{-0{,}02t}\Big]_0^T = \frac{2\,500}{60}\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}02T}\right) = \frac{125}{3}\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}02T}\right).$$

1. Pause de 30 minutes

$E(30) = \frac{125}{3}\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}6}\right) \approx$ **18,8 kWh**, soit environ 31 % de la batterie : on passe de 20 % à environ 51 %.

2. Atteindre 80 %

Il faut ajouter $60 \times 0{,}6 = 36$ kWh :

$$\frac{125}{3}\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}02T}\right) = 36 \iff \mathrm{e}^{-0{,}02T} = 1 - \frac{108}{125} = 0{,}136 \iff T = \frac{-\ln 0{,}136}{0{,}02} \approx 99{,}8.$$

Il faut environ **1 h 40 min**.

3. Recharge complète

Il faudrait 48 kWh. Or $\mathrm{e}^{-0{,}02T} > 0$, donc $E(T) < \frac{125}{3} \approx 41{,}7$ kWh pour tout T : **dans ce modèle, la recharge complète est impossible**, la batterie plafonne vers $20\,\% + \frac{41{,}7}{60} \approx 89\,\%$. ($E(T) \to \frac{125}{3}$ quand $T \to +\infty$.) En pratique, la borne finit la charge lentement à puissance réduite.

Pour aller plus loin

$E(60) = \frac{125}{3}(1-\mathrm{e}^{-1{,}2}) \approx 29{,}1$ kWh en une heure, soit une puissance moyenne de **29,1 kW** (valeur moyenne $\frac{1}{60}\int_0^{60} P(t)\,\mathrm{d}t$), bien moins que les 50 kW affichés. Les premiers kWh arrivent vite, les derniers très lentement : les 30 premières minutes donnent 18,8 kWh, les 30 suivantes seulement 10,3 kWh. D'où le conseil : faire plusieurs arrêts courts entre 20 % et 80 %, plutôt qu'un long arrêt jusqu'à 100 %.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive ; primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$.
- Valeur moyenne d'une fonction ; interprétation d'une intégrale (énergie = intégrale de la puissance).