Calcul intégral
Problème de recherche : une somme qui tend vers ln 2

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

La mission

1. Écrire une fonction Python qui calcule S_n. Calculer S_{10}, S_{100}, $S_{1\,000}$. Conjecturer le sens de variation et la limite de (S_n).
2. Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{k}.$$

   Interpréter avec des aires de rectangles.
3. En déduire que $S_n \leqslant \ln 2 \leqslant S_n + \dfrac{1}{2n}$, puis la limite de (S_n).
4. Démontrer que la suite (S_n) est croissante.

Pour aller plus loin

Démontrer par récurrence que $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$. Que peut-on en déduire ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !