Calcul intégral
Problème de recherche : une somme qui tend vers ln 2

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

La mission

1. Écrire une fonction Python qui calcule S_n. Calculer S_{10}, S_{100}, $S_{1\,000}$. Conjecturer le sens de variation et la limite de (S_n).
2. Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{k}.$$

   Interpréter avec des aires de rectangles.
3. En déduire que $S_n \leqslant \ln 2 \leqslant S_n + \dfrac{1}{2n}$, puis la limite de (S_n).
4. Démontrer que la suite (S_n) est croissante.

Pour aller plus loin

Démontrer par récurrence que $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$. Que peut-on en déduire ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Conjecture

```
def S(n):
    s = 0
    for k in range(1, n + 1):
        s = s + 1 / (n + k)
    return s
print(S(10), S(100), S(1000))   # 0.6688  0.6907  0.6929
```

La suite semble croissante et tendre vers $\ln 2 \approx 0{,}6931$.

2. L'encadrement

Pour $x \in [k;k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$. Par positivité de l'intégrale (intervalle de longueur 1), on obtient l'encadrement. L'aire sous la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ entre k et $k+1$ est comprise entre l'aire d'un rectangle de hauteur $\frac{1}{k+1}$ et celle d'un rectangle de hauteur $\frac{1}{k}$.

3. La limite

On additionne pour k de n à $2n-1$. Avec la relation de Chasles, $\sum_{k=n}^{2n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(2n) - \ln n = \ln 2$. À gauche, $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} = S_n$; à droite, $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + S_n - \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2n}$. Donc

$$S_n \leqslant \ln 2 \leqslant S_n + \frac{1}{2n}, \quad \text{soit} \quad \ln 2 - \frac{1}{2n} \leqslant S_n \leqslant \ln 2.$$

Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln 2$.

4. Le sens de variation

$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$: la suite est croissante.

Pour aller plus loin

On note A_n la somme alternée. $A_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = S_1$, et $A_{n+1} - A_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = S_{n+1} - S_n$: par récurrence, $A_n = S_n$. Donc $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ tend vers $\ln 2$.

Enrichissement historique : ce développement de $\ln 2$ découle de la série de Nicolaus Mercator, publiée en 1668.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Positivité de l'intégrale ; relation de Chasles ; primitive de $\frac{1}{x}$.

— Interpréter une intégrale comme une aire ; théorème des gendarmes.