Limites de fonctions
Problème de recherche : la tortue et le lièvre

Une tortue et un lièvre font la course. À l'instant $x > 0$, la tortue a parcouru la distance x^{10} et le lièvre la distance e^x (dans une unité commune).

La mission

1. À la calculatrice, déterminer qui est en tête aux instants $x = 1$, $x = 2$, $x = 10$ et $x = 40$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^{10}}$. Qui finit par gagner ?
3. On pose $h(x) = \dfrac{e^x}{x^{10}}$ pour $x > 0$. Étudier les variations de h et ses limites en 0 et en $+\infty$. Combien de fois les deux coureurs se dépassent-ils ? À quels instants environ ?

Pour aller plus loin

La tortue avance maintenant comme x^n, avec n entier, $n \geqslant 1$. Pour quelles valeurs de n le lièvre est-il toujours en tête ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Quelques instants

x	1	2	10	40
tortue x^{10}	1	1 024	10^{10}	$\approx 1{,}05 \times 10^{16}$
lièvre e^x	$\approx 2{,}72$	$\approx 7{,}39$	$\approx 22\,026$	$\approx 2{,}35 \times 10^{17}$
en tête	lièvre	tortue	tortue	lièvre

2. Le vainqueur

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{10}} = +\infty$: le lièvre finit par être aussi loin devant qu'on veut, il **gagne**.

3. Les dépassements

$h'(x) = \frac{e^x x^{10} - e^x \times 10x^9}{x^{20}} = \frac{e^x(x-10)}{x^{11}}$, du signe de $x-10$ sur $]0;+\infty[$. h est décroissante sur $]0;10]$ et croissante sur $[10;+\infty[$.

En 0 : $e^x \to 1$ et $x^{10} \to 0^+$, donc $h(x) \to +\infty$. En $+\infty$: $h(x) \to +\infty$ (question 2). Le minimum est $h(10) = \frac{e^{10}}{10^{10}} \approx 2{,}2 \times 10^{-6} < 1$.

h prend donc la valeur 1 une fois sur $]0;10[$ et une fois sur $]10;+\infty[$ (justification complète avec le théorème des valeurs intermédiaires, au chapitre Continuité). Il y a **deux dépassements** : vers $x \approx 1{,}118$ (la tortue passe devant) et vers $x \approx 35{,}77$ (le lièvre repasse devant, définitivement).

Pour aller plus loin

Avec $h_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$, le même calcul donne un minimum en $x = n$, égal à $\left(\frac{e}{n}\right)^n$. Pour $n = 1$ et $n = 2$, $\frac{e}{n} > 1$: le minimum dépasse 1, le lièvre est **toujours en tête**. Pour $n \geqslant 3$, $\frac{e}{n} < 1$: il y a deux dépassements.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Croissances comparées de l'exponentielle et des puissances.
— Limite d'un quotient ; étude de variations (Première).