Limites de fonctions
Problème de recherche : la famille des collines

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$.

La mission

1. Avec GeoGebra, tracer les courbes de f_1 à f_8. Que conjecture-t-on sur leur comportement en $+\infty$, sur la position et la hauteur de leur sommet, et sur un point commun à toutes les courbes ?
2. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
3. Étudier les variations de f_n. Montrer que son maximum vaut $M_n = n^n \mathrm{e}^{-n}$.
4. Montrer que $\dfrac{M_{n+1}}{M_n} = \dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Sachant que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$ (inégalité de Bernoulli), en déduire que la suite (M_n) est croissante. À partir de quelle valeur de n le sommet dépasse-t-il 1 ?

Pour aller plus loin

Démontrer que toutes les courbes passent par un même point, et étudier la position relative des courbes de f_n et de f_{n+1}.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Conjectures

Les courbes partent de l'origine, montent jusqu'à un sommet situé en $x = n$, de plus en plus haut, puis redescendent vers 0. Elles semblent toutes passer par le point $\left(1\,;\mathrm{e}^{-1}\right)$.

2. Limite en $+\infty$

$f_n(x) = \frac{x^n}{\mathrm{e}^x}$, et par croissance comparée $\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \to +\infty$, donc $f_n(x) \to 0$: l'axe des abscisses est asymptote.

3. Variations

$f_n'(x) = nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} - x^n\mathrm{e}^{-x} = x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}(n-x)$, du signe de $n-x$ sur $]0\,;+\infty[$. f_n croît sur $[0\,;n]$ et décroît sur $[n\,;+\infty[$: le maximum est $M_n = f_n(n) = n^n\mathrm{e}^{-n}$.

4. Des sommets de plus en plus hauts

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^{-n-1}}{n^n\mathrm{e}^{-n}} = \frac{n+1}{\mathrm{e}} \times \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{n+1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant \frac{2(n+1)}{\mathrm{e}} > 1,$$

car $2(n+1) \geqslant 4 > \mathrm{e}$. Les M_n étant positifs, la suite (M_n) est croissante. $M_1 \approx 0{,}37$, $M_2 \approx 0{,}54$, $M_3 \approx 1{,}34$: le sommet dépasse 1 **à partir de** $n = 3$.

Pour aller plus loin

$f_n(1) = \mathrm{e}^{-1}$ pour tout n : toutes les courbes passent par $\left(1\,;\mathrm{e}^{-1}\right)$ (et par l'origine). De plus $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-x}(x-1)$: la courbe de f_{n+1} est au-dessous de celle de f_n sur $]0\,;1[$ et au-dessus sur $]1\,;+\infty[$.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Croissances comparées ; limite en $+\infty$ et asymptote horizontale.
- Étude de variations (Première) ; inégalité de Bernoulli (chapitre Suites et récurrence).