Limites de suites
Problème de recherche : l'escargot sur l'élastique

Un élastique mesure 1 m ; une de ses extrémités est fixée à un mur. Un escargot part du mur et avance de 1 cm par minute vers l'autre extrémité. À la fin de chaque minute, on étire instantanément l'élastique de 1 m, de façon uniforme : l'escargot est emporté avec lui. L'élastique mesure donc 1 m pendant la première minute, 2 m pendant la deuxième, et ainsi de suite.

La mission

1. Justifier qu'au bout de n minutes, l'escargot a parcouru la fraction $p_n = \dfrac{1}{100} H_n$ de l'élastique, où $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

3. En déduire que $H_{2^k} \geqslant 1 + \dfrac{k}{2}$ pour tout entier k, puis que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

4. L'escargot atteint-il l'autre extrémité ? Donner un nombre de minutes qui garantit son arrivée.

Pour aller plus loin

Montrer que $H_{2^k} \leqslant 1 + k$. En déduire que l'escargot n'est pas arrivé au bout de 2^{99} minutes. Comparer à l'âge de l'Univers, environ 7×10^{15} minutes.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !