Logarithme népérien
Problème de recherche : combien de chiffres a 2^{2026} ?

Le nombre 2^{2026} est trop grand pour être affiché par une calculatrice. On veut pourtant connaître son nombre de chiffres et son premier chiffre.

La mission

1. Soit N un entier naturel non nul et p un entier. Démontrer que N s'écrit avec exactement p chiffres si et seulement si
$$p-1 \leqslant \frac{\ln N}{\ln 10} < p.$$
2. En déduire le nombre de chiffres de 2^{2026}, puis celui de 2^{64}.
3. Quel est le premier chiffre de 2^{2026} ?
4. Quel est le plus petit entier n tel que 2^n s'écrit avec au moins 100 chiffres ?

Pour aller plus loin

Parmi les nombres $2^1, 2^2, \ldots, 2^{100}$, combien commencent par le chiffre 1 ? (On pourra écrire un programme Python.) Comparer la proportion obtenue avec $\frac{\ln 2}{\ln 10}$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !