Orthogonalité et distances dans l'espace
Problème de recherche : le drone et la ligne électrique

On modélise un câble électrique par une droite $\mathscr{D}$ passant par $A(0;0;20)$ et dirigée par $\vec{u}(2;1;0)$, dans un repère orthonormé de l'espace (unité : 1 mètre, axe des cotes vertical). Pour des raisons de sécurité, un drone ne doit jamais s'approcher à moins de 10 m du câble.
Un drone de livraison est en vol stationnaire au point $D(10;30;24)$. Il doit rejoindre en ligne droite le point $E(40;0;24)$.

La mission

1. À quelle distance du câble le drone se trouve-t-il au point D ?
2. Le plan de vol de D à E est-il sûr ?
3. Sinon, à quelle altitude constante le drone devrait-il effectuer le trajet (même projection au sol) pour respecter la consigne ?

Pour aller plus loin

Le drone peut-il plutôt contourner le danger en restant à 24 m d'altitude ? Proposer un trajet en deux segments.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Distance du point D au câble

La distance de D à $\mathscr{D}$ est DH, où H est le projeté orthogonal de D sur $\mathscr{D}$. $H = A + k\vec{u}$, soit $H(2k;k;20)$, avec $\overrightarrow{DH} \cdot \vec{u} = 0$:

$$\overrightarrow{DH}\,(2k-10;k-30;-4), \quad 2(2k-10)+(k-30)=0 \iff 5k=50 \iff k=10.$$

$H(20;10;20)$, $\overrightarrow{DH}\,(10;-20;-4)$ et $DH = \sqrt{100+400+16} = \sqrt{516} \approx 22{,}7$ m. Le drone est en sécurité au point D.

2. Le trajet $[DE]$

Un point du trajet s'écrit $M_t = D + t\overrightarrow{DE}$ avec $t \in [0;1]$: $M_t(10+30t;30-30t;24)$. Son projeté sur $\mathscr{D}$ est $H_t(2k;k;20)$ avec $\overrightarrow{M_tH_t} \cdot \vec{u} = 0$:

$$2(2k-10-30t)+(k-30+30t)=0 \iff k=10+6t.$$

Alors $\overrightarrow{M_tH_t}\,(10-18t;36t-20;-4)$, et

$$M_tH_t^2 = (10-18t)^2+(36t-20)^2+16 = 1\,620t^2-1\,800t+516.$$

Ce trinôme est minimal pour $t = \frac{1800}{3240} = \frac{5}{9}$: $M_tH_t^2 = 1\,620\times\frac{25}{81} - 1\,000 + 516 = 16$, soit une distance de **4 m**. Le point correspondant est $M\left(\frac{80}{3};\frac{40}{3};24\right)$, juste à la verticale du câble (au point $\left(\frac{80}{3};\frac{40}{3};20\right)$). **Le plan de vol n'est pas sûr** : le drone survole le câble à 4 m.

3. Altitude de sécurité

À altitude h, le même calcul donne $M_tH_t^2 = (10-18t)^2+(36t-20)^2+(h-20)^2$, dont le minimum est $(h-20)^2$ (pour $t=\frac{5}{9}$). Il faut $|h-20| \geqslant 10$: voler à **au moins 30 m** d'altitude (ou à 10 m ou moins, ce qui est peu raisonnable pour un drone).

Pour aller plus loin

À 24 m, la trajectoire au sol coupe forcément la projection du câble (les points D et E sont de part et d'autre) : en restant à 24 m, le drone passe toujours à 4 m du câble au moment du croisement. Contourner en restant à 24 m est donc impossible ; il faut monter au-dessus de 30 m au moment du croisement. (Hypothèse : câble rectiligne et infini ; un vrai câble forme une chaînette entre deux pylônes.)

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Produit scalaire dans l'espace en repère orthonormé ; orthogonalité.
- Projeté orthogonal d'un point sur une droite ; distance d'un point à une droite.