Orthogonalité et distances dans l'espace
Problème de recherche : deux câbles qui ne se touchent pas

Dans un repère orthonormé de l'espace (unité : le mètre), deux câbles rectilignes sont modélisés par :

— la droite d_1 passant par $O(0;0;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_1(1;0;0)$;

— la droite d_2 passant par $B(1;0;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_2(0;1;1)$.

Pour t et s réels, on note M le point de d_1 tel que $\overrightarrow{OM} = t\,\vec{u}_1$, et N le point de d_2 tel que $\overrightarrow{BN} = s\,\vec{u}_2$.

La mission

1. Démontrer que les deux câbles ne sont ni parallèles ni sécants.
2. Avec GeoGebra 3D, faire varier M et N et conjecturer la plus petite distance possible entre un point du premier câble et un point du second.
3. Exprimer MN^2 en fonction de t et s, puis démontrer la conjecture. Préciser les points M_0 et N_0 pour lesquels la distance est minimale.
4. Démontrer que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux deux câbles.

Pour aller plus loin

Réciproquement, démontrer que si $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$, alors $M = M_0$ et $N = N_0$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Position relative

$\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires : les droites ne sont pas parallèles. $M(t\,;0\,;0)$ et $N(1\,;s\,;2+s)$; un point commun vérifierait $s=0$ et $2+s=0$, ce qui est impossible. Les droites ne sont **pas coplanaires**.

2. Conjecture

GeoGebra suggère une distance minimale d'environ 1,41 m, soit $\sqrt{2}$, obtenue pour $t=1$ et $s=-1$.

3. Démonstration

$\overrightarrow{MN}\,(1-t\,;s\,;2+s)$, donc

$$MN^2=(1-t)^2+s^2+(2+s)^2=(1-t)^2+2s^2+4s+4=(1-t)^2+2(s+1)^2+2.$$

Les deux carrés sont positifs, donc $MN^2\geqslant 2$, avec égalité si et seulement si $t=1$ et $s=-1$. La distance minimale est $\sqrt{\mathbf{2}}$ m $\approx 1{,}41$ m, atteinte pour $M_0(1\,;0\,;0)$ et $N_0(1\,;-1\,;1)$.

4. Orthogonalité

$\overrightarrow{M_0N_0}\,(0\,;-1\,;1)$; $\overrightarrow{M_0N_0}\cdot\vec{u}_1=0$ et $\overrightarrow{M_0N_0}\cdot\vec{u}_2=-1+1=0$. La droite (M_0N_0) coupe les deux câbles et leur est orthogonale : c'est leur **perpendiculaire commune**.

Pour aller plus loin

$\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}_1=1-t$ et $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}_2=s+2+s=2s+2$. Les deux sont nuls si et seulement si $t=1$ et $s=-1$: la perpendiculaire commune est unique, et elle réalise la plus courte distance.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Produit scalaire en coordonnées dans l'espace ; orthogonalité de droites.
- Distance entre deux points ; positions relatives de droites (chapitre précédent).