Représentations paramétriques et équations cartésiennes
Problème de recherche : le lancer de rayons

Dans les moteurs graphiques (technique du *ray tracing*), chaque pixel de l'écran est colorié en suivant un rayon lumineux issu de la caméra : on cherche le premier objet touché. Les objets sont découpés en triangles.
Dans un repère orthonormé de l'espace, une scène contient un seul triangle, de sommets $A(4;0;0)$, $B(0;4;0)$ et $C(0;0;4)$. La caméra est au point $E(-1;-1;0)$. On lance des rayons depuis E dans les directions

$$\vec{d}_1(1;1;1), \qquad \vec{d}_2(1;0;1), \qquad \vec{d}_3(1;-1;0).$$

La mission

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Pour chacun des trois rayons, dire s'il touche le triangle ABC, et si oui en quel point.
3. Décrire une méthode générale (un algorithme) pour décider si un rayon issu de E et de direction $\vec{d}(a;b;c)$ touche le triangle.

Pour aller plus loin

Une lampe ponctuelle est placée en $L(1;1;6)$. Le point $M(1;1;0)$ du sol est-il à l'ombre du triangle ? Et le point $N(3;3;0)$?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le plan (ABC)

Les trois points vérifient $x+y+z=4$, et ils ne sont pas alignés : (ABC) a pour équation $\boldsymbol{x+y+z=4}$ (vecteur normal $\vec{n}(1;1;1)$).

2. Les trois rayons

Un point de ABC est un point $M(x;y;z)$ du plan avec $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ (le triangle est la partie du plan située dans le « coin » positif). Un rayon est une demi-droite : $M(t)=E+t\vec{d}$ avec $t\geqslant 0$.

— Rayon 1 : $M(-1+t;-1+t;t)$. Dans le plan : $3t-2=4$, $t=2\geqslant 0$, point $(1;1;2)$. Coordonnées positives : **le rayon touche le triangle** en $(1;1;2)$.

— Rayon 2 : $M(-1+t;-1;t)$. Dans le plan : $2t-2=4$, $t=3$, point $(2;-1;3)$. L'ordonnée est négative : le rayon traverse le plan **hors du triangle**.

— Rayon 3 : $M(-1+t;-1-t;0)$. On a $x+y+z=-2$ pour tout t : le rayon est **parallèle au plan** ($\vec{d}_3\cdot\vec{n}=0$) et ne le coupe jamais.

3. Algorithme

1. Calculer $\vec{d}\cdot\vec{n}=a+b+c$. S'il est nul, le rayon est parallèle au plan : pas d'intersection.
2. Sinon, résoudre $(-1+ta)+(-1+tb)+tc=4$: $t=\frac{6}{a+b+c}$. Si $t<0$, le plan est derrière la caméra : pas d'intersection.
3. Calculer $M(t)$ et tester si ses trois coordonnées sont positives.

Pour un triangle quelconque, l'étape 3 utilise l'écriture $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ et teste $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta\leqslant 1$ (algorithme de Möller-Trumbore, enrichissement). Un jeu répète ce test des milliards de fois par seconde.

Pour aller plus loin

M est à l'ombre si le segment $[LM]$ coupe le triangle. $[LM]$: $(1;1;6-6t)$, $t\in[0;1]$. Dans le plan : $8-6t=4$, $t=\frac{2}{3}$, point $(1;1;2)$, dans le triangle : M **est à l'ombre**. $[LN]$: $(1+2t;1+2t;6-6t)$; $8-2t=4$ donne $t=2>1$: l'intersection avec le plan n'est pas sur le segment, N **est éclairé**.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Équation cartésienne d'un plan ; représentation paramétrique d'une droite.

— Intersection d'une droite et d'un plan ; droite parallèle à un plan.