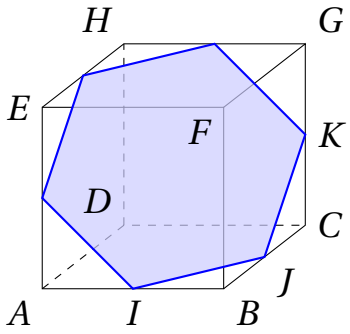
Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Problème de recherche : l'hexagone caché dans le cube

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. On se place dans le repère orthonormé d'origine A défini par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Ainsi $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$. On note I, J, K les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BC]$ et $[CG]$.



La mission

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1;-1;1)$ est normal au plan (IJK), puis déterminer une équation cartésienne de ce plan.
2. Déterminer les points d'intersection du plan (IJK) avec les arêtes $[GH]$, $[HE]$ et $[EA]$.
3. Démontrer que la section du cube par le plan (IJK) est un hexagone régulier, dont on précisera la longueur du côté.
4. Démontrer que la droite (DF) est orthogonale au plan (IJK) et déterminer leur point d'intersection.

Pour aller plus loin

Quelle est la section du cube par le plan parallèle à (IJK) qui passe par A?

Coups de pouce

Bloqué? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché!