Représentations paramétriques et équations cartésiennes
Problème de recherche : le principe du GPS

Un récepteur, placé en un point inconnu $M(x;y;z)$, sait mesurer ses distances à des balises de position connue. On se place dans un repère orthonormé (unité : le kilomètre).

La mission

1. Les balises sont $A(0;0;0)$, $B(10;0;0)$, $C(0;10;0)$ et $D(0;0;10)$. Le récepteur mesure $MA^2 = 50$, $MB^2 = 90$, $MC^2 = 70$ et $MD^2 = 50$. Démontrer que $MB^2 - MA^2 = 100 - 20x$. En déduire que M appartient à un plan dont on donnera une équation, puis déterminer les coordonnées de M.
2. La balise D tombe en panne. Démontrer qu'avec les seules mesures de A, B et C, le point M appartient à une droite Δ dont on donnera une représentation paramétrique. Combien de positions sont possibles ? Laquelle est plausible si le récepteur est au-dessus du sol, d'équation $z = 0$?
3. On utilise maintenant les balises $A(0;0;0)$, $B'(4;0;0)$, $C'(0;6;0)$ et $D'(2;2;8)$, avec les mesures $MA^2 = MB'^2 = MC'^2 = 29$ et $MD'^2 = 17$. Déterminer la position du récepteur.

Pour aller plus loin

Soit P et Q deux points distincts et k un réel. Démontrer que l'ensemble des points M tels que $MP^2 - MQ^2 = k$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{PQ}$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Quatre balises

$MA^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et $MB^2 = (x-10)^2 + y^2 + z^2$, donc $MB^2 - MA^2 = -20x + 100$. La mesure donne $100 - 20x = 40$: M appartient au plan d'équation $x = 3$. De même, $MC^2 - MA^2 = 100 - 20y = 20$ donne $y = 4$, et $MD^2 - MA^2 = 100 - 20z = 0$ donne $z = 5$. Le récepteur est en $\boldsymbol{M(3;4;5)}$ (on vérifie $MA^2 = 9 + 16 + 25 = 50$).

2. Trois balises seulement

On a toujours $x = 3$ et $y = 4$: M est sur l'intersection de deux plans, la droite $\Delta = \{(3;4;t),\ t \in \mathbb{R}\}$, de vecteur directeur $(0;0;1)$. Puis $MA^2 = 50$ donne $9 + 16 + t^2 = 50$, soit $t = 5$ ou $t = -5$. Deux positions sont possibles, $(3;4;5)$ et $(3;4;-5)$; seule la première est au-dessus du sol. Les vrais récepteurs utilisent aussi ce genre d'argument pour éliminer une solution absurde.

3. Des balises quelconques

$MB'^2 - MA^2 = -8x + 16 = 0$, d'où $x = 2$. $MC'^2 - MA^2 = -12y + 36 = 0$, d'où $y = 3$. $MD'^2 - MA^2 = -4x - 4y - 16z + 72 = 17 - 29 = -12$, d'où $4x + 4y + 16z = 84$, puis $16z = 84 - 8 - 12 = 64$ et $z = 4$. Le récepteur est en $\boldsymbol{(2;3;4)}$; on vérifie $MA^2 = 4 + 9 + 16 = 29$ et $MD'^2 = 0 + 1 + 16 = 17$.

Pour aller plus loin

Avec I milieu de $[PQ]$: $MP^2 - MQ^2 = \left(\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MQ}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}\right) = \overrightarrow{QP} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{PQ}$. L'égalité $2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{PQ} = k$ est, en coordonnées, une équation $ax + by + cz + d = 0$ où $(a;b;c)$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{PQ}$, non nul : c'est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{PQ}$.

Enrichissement : les satellites du GPS ne mesurent pas directement des distances, mais des durées de trajet de signaux ; il faut au moins quatre satellites pour corriger aussi l'erreur de l'horloge du récepteur.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Équation cartésienne d'un plan ; intersection de plans.
- Représentation paramétrique d'une droite ; résolution d'un système.