Primitives et équations différentielles
Problème de recherche : l'heure du crime

À 23 h, un enquêteur découvre une victime dans une pièce maintenue à 20 °C. La température du corps est alors de 30 °C. Une heure plus tard, elle n'est plus que de 28 °C. On admet qu'au moment du décès le corps était à 37 °C.
D'après la **loi de refroidissement de Newton**, la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à l'écart entre sa température et celle de la pièce. En notant $T(t)$ la température du corps (en °C) t heures après 23 h, il existe une constante $k > 0$ telle que

$$T'(t) = -k\big(T(t) - 20\big).$$

La mission

1. Résoudre l'équation différentielle et déterminer $T(t)$ à l'aide des deux mesures.
2. À quelle heure le décès a-t-il eu lieu ?
3. Le suspect principal a un alibi solide de 18 h à 21 h. Est-il disculpé ?

Pour aller plus loin

À quelle heure le corps aurait-il atteint 21 °C ? Le modèle permet-il de dire quand il atteindra 20 °C ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Résolution

L'équation s'écrit $T' = -kT + 20k$, du type $y' = ay + b$ avec $a = -k$ et $b = 20k$. La solution constante est $-\frac{b}{a} = 20$, donc les solutions sont

$$T(t) = 20 + C\,\mathrm{e}^{-kt}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

$T(0) = 30$ donne $C = 10$. $T(1) = 28$ donne $10\,\mathrm{e}^{-k} = 8$, soit $\mathrm{e}^{-k} = 0{,}8$ et $k = \ln(1{,}25) \approx 0{,}223$. Ainsi

$$T(t) = 20 + 10 \times 0{,}8^{\,t} = 20 + 10\,\mathrm{e}^{-t\ln 1{,}25}.$$

2. Heure du décès

On cherche t (négatif : avant 23 h) tel que $T(t) = 37$:

$$10\,\mathrm{e}^{-kt} = 17 \iff -kt = \ln 1{,}7 \iff t = -\frac{\ln 1{,}7}{\ln 1{,}25} \approx -2{,}378 \text{ h}.$$

0,378 h ≈ 23 min. Le décès a eu lieu environ 2 h 23 min avant 23 h, soit **vers 20 h 37**.

3. L'alibi

Le suspect est couvert de 18 h à 21 h, et le décès est estimé à 20 h 37 : **il est disculpé**, si l'on fait confiance au modèle. Prudence toutefois : de petites erreurs de mesure changent nettement le résultat. Avec 27,9 °C au lieu de 28 °C à minuit, on trouve $t \approx -2{,}25$ h, soit 20 h 45 ; avec un corps à 36,5 °C au décès (et 28 °C à minuit), on trouve 20 h 45 environ. L'estimation est fiable à quelques dizaines de minutes près ; ici, cela ne change pas la conclusion.

Pour aller plus loin

$T(t) = 21 \iff \mathrm{e}^{-kt} = 0{,}1 \iff t = \frac{\ln 10}{\ln 1{,}25} \approx 10{,}3$ h après 23 h, soit vers **9 h 19** le lendemain matin. En revanche, $T(t) = 20$ n'a pas de solution : $\mathrm{e}^{-kt} > 0$, la température tend vers 20 sans jamais l'atteindre (asymptote). En réalité, le corps est à 20 °C « à la précision du thermomètre près » au bout de quelques heures de plus. (Les légistes utilisent des modèles plus fins : le refroidissement d'un corps commence par un plateau.)

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$; solution vérifiant une condition initiale.
- Logarithme népérien pour résoudre $\mathrm{e}^x = c$.