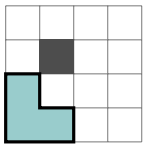
Suites et récurrence
Problème de recherche : le puzzle des triominos

Un concepteur de jeu de puzzle imagine des niveaux de la forme suivante : un plateau carré de $2^n \times 2^n$ cases ($n \geqslant 1$), dont **une seule case** (n'importe laquelle) est bloquée. Le joueur doit recouvrir toutes les autres cases, sans chevauchement, avec des **triominos en L** (pièces de 3 cases en forme de L, que l'on peut tourner).



Plateau 4×4 ($n = 2$), une case bloquée et un triomino posé.

La mission

1. Vérifier que le niveau est possible pour $n = 1$ et trouver un pavage pour le plateau 4×4 ci-dessus.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $4^n - 1$ est divisible par 3. Pourquoi est-ce une condition nécessaire pour que le niveau soit possible ? Combien de triominos faut-il alors ?
3. Le concepteur affirme : « Quel que soit n et quelle que soit la case bloquée, le niveau est toujours faisable. » Le démontrer.

Pour aller plus loin

Le concepteur veut maintenant des plateaux 5×5 avec une case bloquée. Le nombre de cases restantes est-il compatible ? Le niveau est-il faisable si la case bloquée est dans un coin ? Au centre ? Sur la case juste à droite d'un coin ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !