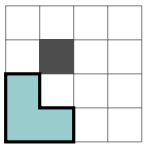
Suites et récurrence
Problème de recherche : le puzzle des triominos

Un concepteur de jeu de puzzle imagine des niveaux de la forme suivante : un plateau carré de $2^n \times 2^n$ cases ($n \geqslant 1$), dont **une seule case** (n'importe laquelle) est bloquée. Le joueur doit recouvrir toutes les autres cases, sans chevauchement, avec des **triominos en L** (pièces de 3 cases en forme de L, que l'on peut tourner).



Plateau 4×4 ($n = 2$), une case bloquée et un triomino posé.

La mission

1. Vérifier que le niveau est possible pour $n = 1$ et trouver un pavage pour le plateau 4×4 ci-dessus.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $4^n - 1$ est divisible par 3. Pourquoi est-ce une condition nécessaire pour que le niveau soit possible ? Combien de triominos faut-il alors ?
3. Le concepteur affirme : « Quel que soit n et quelle que soit la case bloquée, le niveau est toujours faisable. » Le démontrer.

Pour aller plus loin

Le concepteur veut maintenant des plateaux 5×5 avec une case bloquée. Le nombre de cases restantes est-il compatible ? Le niveau est-il faisable si la case bloquée est dans un coin ? Au centre ? Sur la case juste à droite d'un coin ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Les petits cas

Pour $n = 1$, le plateau 2×2 privé d'une case est exactement un triomino en L. Pour le plateau 4×4, on le découpe en quatre carrés 2×2 ; la case bloquée est dans l'un d'eux (en haut à gauche). On pose un triomino au centre du plateau, qui occupe une case de chacun des trois autres carrés 2×2. Chacun des quatre carrés 2×2 a alors exactement une case occupée : on le complète avec un triomino. Il faut 5 triominos.

2. Divisibilité par 3

Soit $\mathscr{P}(n)$: « $4^n - 1$ est divisible par 3 ». *Initialisation* : $4^1 - 1 = 3$. *Hérédité* : si $4^n - 1 = 3k$ avec k entier, alors $4^{n+1} - 1 = 4(3k+1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k+1)$, donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Chaque triomino couvre 3 cases : le nombre de cases à couvrir, $4^n - 1$, doit être un multiple de 3. Il faut alors $\dfrac{4^n - 1}{3}$ triominos (5 pour $n = 2$, 21 pour $n = 3$, 341 pour $n = 5$).

3. Le niveau est toujours faisable

Soit $\mathscr{Q}(n)$: « pour toute case bloquée, le plateau $2^n \times 2^n$ peut être pavé ».

Initialisation : $\mathscr{Q}(1)$ est vraie (question 1). *Hérédité* : supposons $\mathscr{Q}(n)$ vraie et prenons un plateau $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ avec une case bloquée. On le partage en quatre quarts de taille $2^n \times 2^n$. La case bloquée est dans l'un des quarts. On pose un triomino au centre du grand plateau, de façon qu'il occupe une case de chacun des trois autres quarts. Chaque quart est alors un plateau $2^n \times 2^n$ avec exactement une case indisponible : par hypothèse de récurrence, chacun peut être pavé. Le grand plateau est donc pavé, et $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par récurrence, le niveau est faisable pour tout $n \geqslant 1$ et toute case bloquée. La preuve donne même un algorithme (récursif) pour construire la solution.

Pour aller plus loin (enrichissement)

$25 - 1 = 24$ est divisible par 3 (8 triominos), donc le comptage ne l'interdit pas. On peut montrer que le plateau 5×5 privé d'une case est pavable si et seulement si la case bloquée a ses deux coordonnées impaires (en numérotant de 1 à 5) : coin et centre conviennent, mais pas la case voisine d'un coin. Sinon, c'est impossible : les 9 cases de coordonnées impaires sont alors toutes libres, or chaque triomino en couvre au plus une.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

Raisonnement par récurrence (initialisation, hérédité, conclusion), ici sur une propriété géométrique et non sur une suite.