Suites et récurrence
Problème de recherche : la somme des cubes

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n, \qquad K_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2, \qquad C_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

La mission

1. À l'aide d'un tableur ou d'un programme, calculer S_n et C_n pour n allant de 1 à 15. Quelle relation semble lier C_n et S_n ?
2. Démontrer par récurrence que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, puis que la relation conjecturée est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
3. Calculer K_n et le quotient $\dfrac{K_n}{S_n}$ pour les premières valeurs de n. En déduire une formule pour K_n et la démontrer par récurrence.

Pour aller plus loin

On écrit les nombres impairs par paquets de plus en plus longs :

$$1 \mid 3+5 \mid 7+9+11 \mid 13+15+17+19 \mid \ldots$$

Que remarque-t-on pour la somme de chaque paquet ? Démontrer cette observation, puis en déduire une autre preuve de la formule de C_n.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !