Somme de variables aléatoires
Problème de recherche : les dés du concepteur de jeu

Un concepteur de jeu de rôle hésite entre trois formules pour les dégâts d'une épée (tous les dés sont équilibrés et indépendants) :

— **formule A** : lancer deux dés à 6 faces et additionner les résultats ;
— **formule B** : lancer un dé à 12 faces ;
— **formule C** : lancer un dé à 6 faces et doubler le résultat.

Les trois formules donnent des dégâts entre 1 (ou 2) et 12.

La mission

1. Les trois formules infligent-elles en moyenne les mêmes dégâts ?
2. Un « coup critique » se déclenche quand les dégâts atteignent au moins 10. Quelle formule donne le plus de coups critiques ?
3. Les joueurs se plaignent quand les dégâts sont trop imprévisibles. Quelle formule est la plus régulière ? Expliquer pourquoi A et C, qui se ressemblent, sont si différentes.

Pour aller plus loin

On remplace la formule A par la formule $Y_n = \frac{2}{n}(D_1 + \cdots + D_n)$, où $D_1, \ldots, D_n$ sont n dés à 6 faces (le facteur $\frac{2}{n}$ garde une moyenne de 7). Que devient la variance quand n augmente ? Interpréter pour le joueur.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Un dé à 6 faces

Si D suit la loi uniforme sur $\{1,\dots,6\}$: $E(D) = 3{,}5$, $E(D^2) = \frac{91}{6}$, donc $V(D) = \frac{91}{6} - 3{,}5^2 = \frac{35}{12}$.

1. Moyennes

— A : $X_A = D_1 + D_2$, $E(X_A) = E(D_1) + E(D_2) = 7$.
— B : X_B uniforme sur $\{1,\dots,12\}$, $E(X_B) = \frac{1+12}{2} = 6{,}5$.
— C : $X_C = 2D$, $E(X_C) = 2E(D) = 7$.

A et C infligent en moyenne 7 dégâts, B un peu moins (6,5).

2. Coups critiques

A : sommes $\geqslant 10$ obtenues par $(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)$: $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$.
B : $P(X_B \geqslant 10) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. C : $2D \geqslant 10 \iff D \geqslant 5$, $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$. **La formule C donne deux fois plus de critiques que la formule A.**

3. Régularité : la variance

— A : D_1 et D_2 indépendants, donc $V(X_A) = V(D_1) + V(D_2) = \frac{35}{6} \approx 5{,}83$, $\sigma \approx 2{,}42$.
— B : $V(X_B) = \frac{12^2-1}{12} = \frac{143}{12} \approx 11{,}92$, $\sigma \approx 3{,}45$.
— C : $V(X_C) = V(2D) = 2^2 V(D) = \frac{35}{3} \approx 11{,}67$, $\sigma \approx 3{,}42$.

La formule A est de loin la plus régulière (variance deux fois plus petite). Explication : $V(2D) = 4V(D)$ alors que $V(D_1 + D_2) = 2V(D)$. Avec deux dés, un mauvais lancer est souvent compensé par un bon ; en doublant un seul dé, un mauvais lancer est doublé. Les valeurs extrêmes sont rares pour A ($P(X_A = 2) = \frac{1}{36}$), fréquentes pour C ($P(X_C = 2) = \frac{1}{6}$).

Pour aller plus loin

$E(Y_n) = \frac{2}{n} \times 3{,}5n = 7$ et, les dés étant indépendants, $V(Y_n) = \frac{4}{n^2} \times n \times \frac{35}{12} = \frac{35}{3n}$, qui tend vers 0 : plus on lance de dés, plus les dégâts se concentrent autour de 7. Pour le joueur : des dégâts prévisibles, mais moins de surprises. C'est un avant-goût de la loi des grands nombres.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Linéarité de l'espérance ; $V(aX) = a^2 V(X)$.
— Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.