Somme de variables aléatoires
Problème de recherche : les chapeaux mélangés

À la fin d'une soirée, n invités ($n \geqslant 2$) récupèrent leur chapeau au vestiaire, mais les chapeaux sont rendus complètement au hasard : toutes les répartitions sont équiprobables. On note X le nombre d'invités qui récupèrent leur propre chapeau.

La mission

1. Pour $n = 3$, déterminer la loi de X et son espérance.
2. Pour n quelconque, calculer $E(X)$ à l'aide de variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ bien choisies. Le résultat dépend-il de n ?
3. *Les records.* Un athlète réalise 10 sauts dont les longueurs sont toutes différentes, et dont l'ordre est aléatoire (tous les ordres sont équiprobables). Un saut est un record s'il est plus long que tous les précédents ; le premier saut est toujours un record. Calculer le nombre moyen de records.

Pour aller plus loin

Les variables $X_1, \ldots, X_n$ de la question 2 sont-elles indépendantes ? Pourquoi ne peut-on pas calculer $V(X)$ aussi simplement que $E(X)$?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !