Somme de variables aléatoires
Problème de recherche : la marche au hasard

Un marcheur part de l'origine d'un axe gradué. À chaque seconde, il lance une pièce équilibrée et fait un pas de longueur 1 vers la droite (pile) ou vers la gauche (face). Les lancers sont indépendants. On note X_i le i^{e} pas ($X_i = 1$ ou $X_i = -1$) et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la position après n pas.

La mission

1. Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$, puis l'écart type de S_n.
2. Écrire une fonction Python `marche(n)` qui simule une marche de n pas et renvoie S_n. Simuler 1 000 marches de 100 pas et calculer la moyenne des S_{100}, des S_{100}^2 et des $|S_{100}|$.
3. Démontrer que $E\left(S_n^2\right) = n$. Interpréter : à quelle distance de l'origine le marcheur se trouve-t-il « typiquement » après n pas ?
4. On note Y le nombre de pas vers la droite parmi les n premiers. Exprimer S_n en fonction de Y et retrouver les résultats de la question 1. Calculer la probabilité que le marcheur soit revenu à l'origine après 100 pas.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !