Fonctions trigonométriques
Problème de recherche : la règle des douzièmes

Dans un port, la mer est basse à 8 h (hauteur d'eau 1 m) et haute à 14 h (hauteur d'eau 7 m). Les marins utilisent la **règle des douzièmes** : pendant les six heures de la marée montante, la mer monte successivement de 1, 2, 3, 3, 2 et 1 douzièmes du marnage (différence entre haute et basse mer).
Un modèle plus précis est donné par la fonction

$$h(t) = 4 - 3\cos\left(\frac{\pi}{6}(t-8)\right), \qquad t \in [8\,;14],$$

où t est l'heure et $h(t)$ la hauteur d'eau en mètres.

La mission

1. Comparer heure par heure les hauteurs d'eau données par la règle des douzièmes et par le modèle.
2. Un voilier a besoin d'au moins 5 m d'eau pour sortir du port. À partir de quelle heure peut-il partir, selon chacune des deux méthodes ?
3. À quel moment la mer monte-t-elle le plus vite, et à quelle vitesse ?

Pour aller plus loin

Expliquer d'où vient la suite 1, 2, 3, 3, 2, 1 en calculant, avec le modèle, la fraction du marnage gagnée pendant chaque heure.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Comparaison heure par heure

Marnage : $7-1=6$ m, un douzième vaut 0,5 m. La règle donne des montées de 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 1,5 ; 1 ; 0,5 m.

Heure	8	9	10	11	12	13	14
Douzièmes (m)	1	1,5	2,5	4	5,5	6,5	7
Modèle $h(t)$ (m)	1	1,40	2,5	4	5,5	6,60	7

Par exemple $h(9) = 4 - 3\cos\frac{\pi}{6} = 4 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}40$. Les deux méthodes coïncident à 10 h, 11 h et 12 h ; l'écart maximal aux heures entières est d'environ 10 cm : **la règle est très fiable**.

2. Sortie du voilier

Modèle : $h(t) \geqslant 5 \iff \cos\left(\frac{\pi}{6}(t-8)\right) \leqslant -\frac{1}{3}$. Avec $\frac{\pi}{6}(t-8) \in [0;\pi]$, où cos est décroissante :

$$\frac{\pi}{6}(t-8) \geqslant \arccos\left(-\tfrac{1}{3}\right) \approx 1{,}911 \iff t \geqslant 8 + \frac{6\times 1{,}911}{\pi} \approx 11{,}65.$$

Départ possible à partir de **11 h 39** environ.

Douzièmes : à 11 h on a 4 m, et la mer monte de 1,5 m entre 11 h et 12 h. En supposant la montée régulière dans cette heure, il faut $\frac{1}{1{,}5}$ h = 40 min : départ à **11 h 40**. Écart d'une minute seulement.

3. Vitesse maximale

$h'(t) = 3\times\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-8)\right) = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-8)\right)$, maximale quand le sinus vaut 1, soit $\frac{\pi}{6}(t-8) = \frac{\pi}{2}$, $t = 11$. La mer monte le plus vite à **mi-marée (11 h)**, à $\frac{\pi}{2} \approx$ **1,57 m/h**. (La règle des douzièmes donne 1,5 m/h entre 10 h et 12 h.)

Pour aller plus loin

Pendant l'heure k, le modèle gagne $3\left[\cos\frac{\pi(k-1)}{6} - \cos\frac{\pi k}{6}\right]$ mètres, soit en douzièmes du marnage :

$$12\times\frac{\cos\frac{\pi(k-1)}{6} - \cos\frac{\pi k}{6}}{2} \quad : \quad 0{,}80\ ;\ 2{,}20\ ;\ 3\ ;\ 3\ ;\ 2{,}20\ ;\ 0{,}80.$$

La règle 1, 2, 3, 3, 2, 1 est un arrondi de cette suite, facile à retenir. Dans la réalité, la marée dure environ 6 h 12 et n'est pas parfaitement sinusoïdale.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Fonction cosinus : valeurs remarquables, variations, résolution d'une inéquation sur un intervalle.
- Dérivée de $t \mapsto \cos(at+b)$; interprétation comme une vitesse.