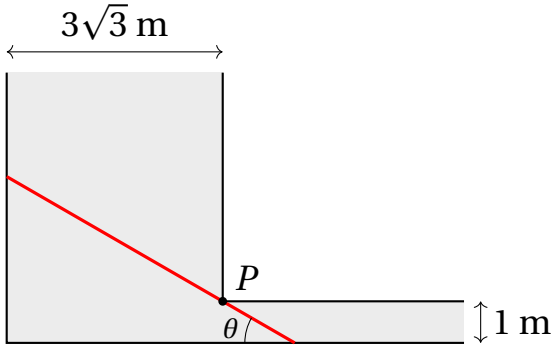
Fonctions trigonométriques
Problème de recherche : l'échelle dans le couloir

Un couloir de largeur 1 m débouche à angle droit sur un couloir de largeur $3\sqrt{3} \approx 5{,}20$ m. On veut faire passer une échelle, portée à l'horizontale, du premier couloir au second.



Lorsque l'échelle fait un angle $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ avec la direction du premier couloir, le plus long segment qui tient dans le virage touche le coin intérieur P et les deux murs extérieurs ; on admet que sa longueur est

$$L(\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}.$$

La mission

1. Expliquer pourquoi la longueur de la plus grande échelle qui peut passer est le minimum de L sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
2. Étudier les variations de L et déterminer cette longueur maximale.
3. Si les deux couloirs mesuraient 1 m de large, quelle serait la longueur maximale ?

Pour aller plus loin

Pour des couloirs de largeurs a et b, démontrer que la longueur maximale vaut $\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !