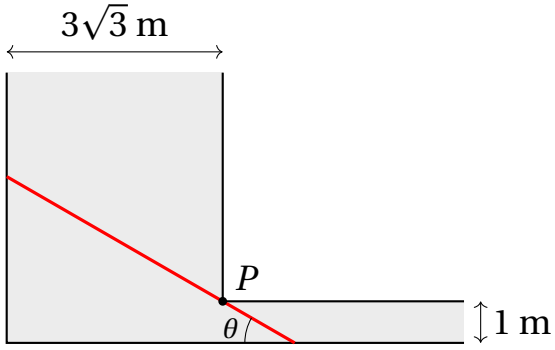
Fonctions trigonométriques
Problème de recherche : l'échelle dans le couloir

Un couloir de largeur 1 m débouche à angle droit sur un couloir de largeur $3\sqrt{3} \approx 5{,}20$ m. On veut faire passer une échelle, portée à l'horizontale, du premier couloir au second.



Lorsque l'échelle fait un angle $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ avec la direction du premier couloir, le plus long segment qui tient dans le virage touche le coin intérieur P et les deux murs extérieurs ; on admet que sa longueur est

$$L(\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}.$$

La mission

1. Expliquer pourquoi la longueur de la plus grande échelle qui peut passer est le minimum de L sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
2. Étudier les variations de L et déterminer cette longueur maximale.
3. Si les deux couloirs mesuraient 1 m de large, quelle serait la longueur maximale ?

Pour aller plus loin

Pour des couloirs de largeurs a et b, démontrer que la longueur maximale vaut $\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le minimum

Pour franchir le virage, l'échelle doit passer par toutes les inclinaisons θ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Pour chacune, elle doit être plus courte que $L(\theta)$. Elle passe donc si et seulement si sa longueur est au plus égale au plus petit des $L(\theta)$: la position la plus étroite décide.

2. Étude de L

$$L'(\theta) = \frac{3\sqrt{3}\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{3\sqrt{3}\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

Sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\theta > 0$, et $L'(\theta)$ a le signe de $3\sqrt{3}\tan^3\theta - 1$ (on divise par $\cos^3\theta$). Or $\tan^3\theta = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \iff \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \theta = \frac{\pi}{6}$. La fonction tangente étant croissante, L est décroissante sur $\left]0;\frac{\pi}{6}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$. Le minimum vaut

$$L\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} + \frac{1}{1/2} = 6 + 2 = \mathbf{8\ m}.$$

3. Deux couloirs de 1 m

$L(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}$, $L'(\theta) = \frac{\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$, nul pour $\tan\theta = 1$, soit $\theta = \frac{\pi}{4}$. Longueur maximale : $L\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ m.

Pour aller plus loin

Avec $L(\theta) = \frac{a}{\cos\theta} + \frac{b}{\sin\theta}$, le minimum est atteint quand $\tan^3\theta = \frac{b}{a}$, c'est-à-dire $\tan\theta = t = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}$. Alors $\frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+t^2}$ et $\frac{1}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$, d'où $L = \sqrt{1+t^2}\left(a + \frac{b}{t}\right) = \sqrt{1+t^2}\left(a + a^{1/3}b^{2/3}\right)$. Avec $1 + t^2 = \frac{a^{2/3}+b^{2/3}}{a^{2/3}}$ et $a + a^{1/3}b^{2/3} = a^{1/3}\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)$, on trouve $L = \left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$. Avec $a = 3\sqrt{3}$ et $b = 1$: $(3+1)^{3/2} = 8$.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Dériver des fonctions trigonométriques ; quotients de fonctions.
- Résoudre une équation trigonométrique ; étudier une fonction trigonométrique.