Fonctions trigonométriques
Problème de recherche : le maximum de $3\cos x + 4\sin x$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos x + 4\sin x$.

La mission

1. Avec GeoGebra, tracer la courbe de f. Conjecturer sa période, son maximum et son minimum.
2. Démontrer que f est périodique de période 2π. Calculer $f'(x)$ et déterminer les valeurs de x de $[0;2\pi[$ où $f'(x) = 0$.
3. On note α l'unique réel de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ et $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = 5\cos(x-\alpha)$. En déduire le maximum et le minimum de f.
4. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ sur $[0;2\pi[$, en fonction de α.
5. Généraliser : quel est le maximum de $a\cos x + b\sin x$, pour des réels a et b non tous deux nuls ?

Pour aller plus loin

Retrouver le résultat de la question 5 en interprétant $a\cos x + b\sin x$ comme un produit scalaire de deux vecteurs du plan.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Conjecture

La courbe ressemble à une sinusoïde de période 2π, de maximum 5 (vers $x \approx 0{,}93$) et de minimum -5.

2. Périodicité et dérivée

cos et sin sont 2π-périodiques, donc $f(x+2\pi) = f(x)$. $f'(x) = -3\sin x + 4\cos x$. $f'(x) = 0 \iff 4\cos x = 3\sin x$; $\cos x = 0$ est impossible (on aurait aussi $\sin x = 0$), donc $f'(x) = 0 \iff \tan x = \frac{4}{3}$. Sur $[0;2\pi[$: $x = \alpha$ et $x = \alpha + \pi$, où $\alpha \approx 0{,}927$.

3. Une seule sinusoïde

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$, donc α existe. Avec la formule d'addition :

$$5\cos(x-\alpha) = 5(\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha) = 3\cos x + 4\sin x = f(x).$$

Comme $-1 \leqslant \cos(x-\alpha) \leqslant 1$, le **maximum est 5**, atteint en $x = \alpha$ (à 2π près), et le **minimum est** -5, atteint en $x = \alpha + \pi$.

4. Une équation

$f(x) = \frac{5}{2} \iff \cos(x-\alpha) = \frac{1}{2} \iff x - \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x - \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Sur $[0;2\pi[$: $x = \alpha + \frac{\pi}{3} \approx 1{,}97$ et $x = \alpha - \frac{\pi}{3} + 2\pi \approx 6{,}17$ (car $\alpha - \frac{\pi}{3} < 0$).

5. Cas général

Avec $R = \sqrt{a^2+b^2}$, il existe α tel que $\cos\alpha = \frac{a}{R}$ et $\sin\alpha = \frac{b}{R}$, et $a\cos x + b\sin x = R\cos(x-\alpha)$: le maximum est $\boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Pour aller plus loin

$a\cos x + b\sin x = \vec{u}\cdot\vec{v}$ avec $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(\cos x;\sin x)$, de norme 1. Or $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}) \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$, avec égalité quand $\vec{v}$ a la même direction et le même sens que $\vec{u}$.

Enrichissement : en électricité, ce calcul montre que la somme de deux tensions sinusoïdales de même fréquence est encore une tension sinusoïdale.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Périodicité ; dérivées de cos et sin.
- Résoudre une équation trigonométrique ; formules d'addition (Première).