Loi binomiale
Problème de recherche : le QCM au hasard

Un QCM comporte 20 questions indépendantes. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, dont une seule est juste. Un élève qui n'a pas révisé répond entièrement au hasard.

La mission

1. Le barème donne 1 point par bonne réponse, et 0 sinon. L'élève espère avoir la moyenne (au moins 10 bonnes réponses). Quelle est la probabilité qu'il y parvienne ?
2. Le professeur décide de retirer des points pour chaque mauvaise réponse. Combien doit-il en retirer pour que la note moyenne d'un élève répondant au hasard soit égale à 0 ?
3. Avec le barème initial, à partir de combien de bonnes réponses le professeur peut-il penser qu'un élève n'a pas répondu au hasard, avec moins de 5 % de risque de se tromper ?

Pour aller plus loin

Avec le barème de la question 2, quelle est la probabilité qu'un élève répondant au hasard obtienne au moins 5 points ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

On note X le nombre de bonnes réponses. On répète 20 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « la réponse est juste », de probabilité $\frac{1}{4}$: X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;0{,}25)$, d'espérance $E(X) = 20 \times 0{,}25 = 5$.

1. Avoir la moyenne au hasard

$P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9) \approx 0{,}0139$. Il a environ **1,4 % de chances** d'avoir la moyenne : répondre au hasard n'est pas une bonne stratégie.

2. Le barème qui neutralise le hasard

On retire r points par mauvaise réponse. La note est $N = X - r(20 - X)$, d'espérance $E(N) = 5 - 15r$ (linéarité de l'espérance). $E(N) = 0 \iff r = \dfrac{1}{3}$.

Il faut retirer **un tiers de point** par mauvaise réponse (c'est le principe de nombreux concours).

3. Un seuil pour repérer le hasard

On cherche le plus petit entier k tel que $P(X \geqslant k) < 0{,}05$. À la calculatrice : $P(X \geqslant 8) \approx 0{,}102$ et $P(X \geqslant 9) \approx 0{,}041$. Donc $k = 9$: un élève répondant au hasard a moins de 5 % de chances d'obtenir 9 bonnes réponses ou plus. **À partir de 9 bonnes réponses**, le professeur peut penser que l'élève n'a pas répondu au hasard (avec un risque de se tromper inférieur à 5 %).

Pour aller plus loin

$N = X - \frac{1}{3}(20 - X) = \dfrac{4X - 20}{3}$. $N \geqslant 5 \iff 4X \geqslant 35 \iff X \geqslant 8{,}75$, soit $X \geqslant 9$. La probabilité est $P(X \geqslant 9) \approx \mathbf{0{,}041}$.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Schéma de Bernoulli, loi binomiale ; calculs de probabilités à la calculatrice.
- Espérance de la loi binomiale ; intervalle I tel que $P(X \in I)$ soit inférieure à une valeur donnée.