Loi binomiale
Problème de recherche : les tests groupés de Dorfman

Une maladie touche 2 % d'une population. On veut dépister 1 000 personnes. Plutôt que de tester chaque personne, on forme des groupes de k personnes (k divise 1 000) et on mélange leurs prélèvements :

— si le test du mélange est négatif, les k personnes du groupe sont déclarées saines ;

— s'il est positif, on teste ensuite séparément chacune des k personnes.

On suppose que les personnes sont malades indépendamment les unes des autres et que le test ne se trompe jamais.

La mission

1. Dans cette question, $k = 10$. Quelle est la probabilité qu'un groupe soit positif ? On note Y le nombre de groupes positifs : quelle est sa loi ? En déduire le nombre moyen de tests nécessaires.

2. Démontrer que, pour une taille k quelconque, le nombre moyen de tests par personne est

$$e(k) = \frac{1}{k} + 1 - 0{,}98^k.$$

3. Quelle taille de groupe faut-il choisir ? Combien de tests économise-t-on en moyenne ?

Pour aller plus loin

Reprendre la question 3 si la maladie touche 10 % de la population. Les tests groupés sont-ils toujours intéressants ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !