Dérivation et convexité
Problème de recherche : le plein à prix fixe

Chaque semaine, Inès fait le plein de sa voiture. Le prix du litre de carburant varie d'une semaine à l'autre. Elle hésite entre deux stratégies :

— stratégie **L** : acheter toujours 40 litres ;
— stratégie **M** : acheter toujours pour 50 € de carburant.

La mission

1. Sur deux semaines, le litre coûte 1,80 € puis 2,00 €. Pour chaque stratégie, calculer le prix moyen payé par litre, c'est-à-dire le montant total dépensé divisé par le nombre total de litres achetés.

2. À l'aide d'un tableur, recommencer avec d'autres couples de prix. Quelle stratégie semble la plus avantageuse ? Quand les deux stratégies sont-elles équivalentes ?

3. Les prix sont a puis b (en €, $a > 0$, $b > 0$). Démontrer que le prix moyen vaut $\dfrac{a+b}{2}$ pour la stratégie L et $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ pour la stratégie M.

4. Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$. En utilisant la position de la courbe de f par rapport à la corde entre les points d'abscisses a et b, démontrer la conjecture de la question 2.

Pour aller plus loin

Démontrer le même résultat par le calcul, en étudiant le signe de $\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{2ab}{a+b}$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Un premier exemple

Stratégie L : $40 \times 1{,}80 + 40 \times 2{,}00 = 152$ € pour 80 L, soit 1,90 € par litre.

Stratégie M : $\frac{50}{1{,}80} + \frac{50}{2{,}00} \approx 27{,}78 + 25 = 52{,}78$ L pour 100 €, soit environ 1,895 € par litre.

La stratégie M est un peu plus avantageuse.

2. Conjecture

Dans le tableur, on place les prix en A2 et B2, puis on calcule `=(A2+B2)/2` et `=100/(50/A2+50/B2)`. Sur tous les essais, le prix moyen de M est inférieur ou égal à celui de L, avec égalité seulement quand les deux prix sont égaux.

3. Les deux prix moyens

L : on paie $40a + 40b$ pour 80 litres, soit $\frac{40(a+b)}{80} = \frac{a+b}{2}$ par litre (moyenne arithmétique).

M : on achète $\frac{50}{a} + \frac{50}{b}$ litres pour 100 €, soit

$$\frac{100}{\frac{50}{a} + \frac{50}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \quad \text{par litre (moyenne harmonique).}$$

4. La preuve par la convexité

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ sur $]0;+\infty[$: f est convexe. Sa courbe est donc en dessous de ses cordes. Le milieu de la corde entre les points $(a;f(a))$ et $(b;f(b))$ a pour coordonnées $\left(\frac{a+b}{2};\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$; il est au-dessus du point de la courbe de même abscisse :

$$\frac{1}{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

en passant aux inverses (nombres positifs). Le prix moyen de M est toujours inférieur ou égal à celui de L. Avec un montant fixe, on achète automatiquement plus de litres quand le prix est bas.

Pour aller plus loin

$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$ et

$$\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \geqslant 0,$$

avec égalité si et seulement si $a = b$.

Remarque : en finance, investir chaque mois une somme fixe repose sur le même principe ; cette stratégie est appelée investissement programmé.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Dérivée seconde et convexité.

— Position d'une courbe convexe par rapport à ses cordes.