Lois à densité
Problème de recherche : la batterie du smartphone reconditionné

Un fabricant modélise la durée de vie T (en années) de la batterie de ses smartphones par une variable aléatoire qui suit la **loi exponentielle** de paramètre $\lambda = 0{,}2$: pour tout $t \geqslant 0$, $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t}$.

La mission

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une batterie ? Quelle proportion des batteries tombe en panne pendant la garantie légale de 2 ans ?
2. Le service commercial veut proposer une « garantie premium » au cours de laquelle au plus 10 % des batteries tombent en panne. Quelle durée maximale peut-il proposer ?
3. Un site vend des smartphones reconditionnés, dont la batterie a déjà 3 ans et fonctionne encore. D'après le modèle, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore 2 ans de plus ? Comparer avec une batterie neuve. Ce résultat vous paraît-il réaliste ?

Pour aller plus loin

Dans le magasin, un client arrive au hasard, et attend qu'un vendeur se libère. Le temps d'attente (en minutes) suit la loi uniforme sur $[0\,;\,15]$. Quelle est la probabilité qu'il attende plus de 10 minutes ? Quel est son temps d'attente moyen ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Durée moyenne et pannes sous garantie

L'espérance d'une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$: $E(T) = \frac{1}{0{,}2} =$ **5 ans**.

$P(T \leqslant 2) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}4} \approx 0{,}330$: environ **33 % des batteries** tombent en panne pendant la garantie (le fabricant a intérêt à soigner ses batteries !).

2. La garantie premium

$P(T \leqslant t) \leqslant 0{,}1 \iff 1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t} \leqslant 0{,}1 \iff \mathrm{e}^{-0{,}2t} \geqslant 0{,}9 \iff -0{,}2t \geqslant \ln 0{,}9 \iff t \leqslant -5 \ln 0{,}9 = 5 \ln \frac{10}{9} \approx 0{,}527$.

La garantie premium ne peut pas dépasser **environ 0,53 an, soit 6 mois** ($0{,}527 \times 12 \approx 6{,}3$ mois). Ce n'est pas très « premium » !

3. La batterie reconditionnée

On cherche $P_{T>3}(T > 5) = \dfrac{P(T > 5)}{P(T > 3)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}^{-0{,}6}} = \mathrm{e}^{-0{,}4} \approx$ **0,670**.

Pour une batterie neuve : $P(T > 2) = \mathrm{e}^{-0{,}4} \approx 0{,}670$: **c'est la même probabilité**. C'est la propriété d'**absence de mémoire** de la loi exponentielle : d'après le modèle, une batterie qui fonctionne encore est « comme neuve ».

Ce n'est pas réaliste : une vraie batterie s'use (elle perd de la capacité à chaque recharge). La loi exponentielle modélise bien des pannes accidentelles, sans usure (composants électroniques, désintégration radioactive), moins bien le vieillissement.

Pour aller plus loin

Pour la loi uniforme sur $[0\,;15]$: $P(W > 10) = \dfrac{15-10}{15} = \dfrac{1}{3}$ et le temps d'attente moyen est $E(W) = \dfrac{0+15}{2} =$ **7,5 minutes**.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Loi exponentielle : fonction de répartition, espérance $\frac{1}{\lambda}$, absence de mémoire.
- Loi uniforme sur $[a\,;b]$: probabilités et espérance.