Lois à densité
Problème de recherche : demi-vie et vie moyenne

La durée de vie T (en jours) d'un atome d'iode 131, utilisé en médecine nucléaire, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $t \geqslant 0$, $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$. La **demi-vie** est la durée m telle que $P(T \leqslant m) = \frac{1}{2}$: au bout de cette durée, la moitié des atomes d'un échantillon se sont désintégrés. Pour l'iode 131, elle vaut 8,02 jours. La **vie moyenne** est l'espérance $E(T)$.

La mission

1. Exprimer la demi-vie m en fonction de λ. En déduire la valeur de λ pour l'iode 131.
2. Calculer la vie moyenne d'un atome d'iode 131. Comparer avec la demi-vie. Démontrer que, pour toute loi exponentielle, la vie moyenne est plus longue que la demi-vie.
3. Quelle proportion des atomes vit plus longtemps que la vie moyenne ? Cette proportion dépend-elle de λ ?
4. Un hôpital estime qu'un patient traité à l'iode 131 n'est plus radioactif lorsque 99 % des atomes se sont désintégrés. Combien de demi-vies faut-il attendre ?

Pour aller plus loin

Quelle proportion des atomes se désintègre entre la vie moyenne et le double de la vie moyenne ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Demi-vie et paramètre

$1-\mathrm{e}^{-\lambda m}=\frac{1}{2} \iff \mathrm{e}^{-\lambda m}=\frac{1}{2} \iff -\lambda m=-\ln 2 \iff m=\dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

Pour l'iode 131 : $\lambda=\frac{\ln 2}{8{,}02}\approx 0{,}0864$ par jour.

2. Vie moyenne

$E(T)=\frac{1}{\lambda}=\frac{8{,}02}{\ln 2}\approx 11{,}6$ jours, plus que la demi-vie.

Dans le cas général, $E(T)=\frac{1}{\lambda}$ et $m=\frac{\ln 2}{\lambda}$. Comme $\ln 2\approx 0{,}693<1$, on a toujours $m<E(T)$. Quelques atomes vivent très longtemps, ce qui augmente la moyenne sans changer la valeur médiane.

3. Au-delà de la vie moyenne

$P\left(T>\frac{1}{\lambda}\right)=\mathrm{e}^{-\lambda\times\frac{1}{\lambda}}=\mathrm{e}^{-1}\approx 0{,}368$. Environ 37 % des atomes vivent plus longtemps que la moyenne, quel que soit λ.

4. Combien de demi-vies ?

$1-\mathrm{e}^{-\lambda t}=0{,}99 \iff \mathrm{e}^{-\lambda t}=0{,}01 \iff t=\frac{\ln 100}{\lambda}$. En nombre de demi-vies :

$$\frac{t}{m}=\frac{\ln 100}{\ln 2}\approx 6{,}64,$$

soit environ 53 jours pour l'iode 131. On peut le retrouver ainsi : après n demi-vies, il reste $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ des atomes, et $\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{128}<0{,}01$.

Pour aller plus loin

$P\left(\frac{1}{\lambda}\leqslant T\leqslant\frac{2}{\lambda}\right)=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}\approx 0{,}233$, soit environ 23 % des atomes.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Loi exponentielle : $P(T\leqslant t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$, espérance $\frac{1}{\lambda}$.
- Résolution d'équations avec la fonction ln.