Équations différentielles
Problème de recherche : la perfusion

À l'hôpital, un patient reçoit un médicament par perfusion continue, à partir de l'instant $t = 0$ (en heures). On note $C(t)$ la concentration du médicament dans le sang (en mg/L). La perfusion apporte le médicament à un rythme constant, tandis que l'organisme l'élimine proportionnellement à sa concentration. On admet que C est solution de l'équation différentielle

$$(E) \ : \quad y' = -0{,}2\,y + 4, \qquad \text{avec } C(0) = 0.$$

Le médicament est efficace lorsque sa concentration dépasse 18 mg/L.

La mission

1. Déterminer l'expression de $C(t)$. Vers quelle valeur la concentration se stabilise-t-elle ?
2. Au bout de combien de temps le médicament devient-il efficace ?
3. Le médecin trouve ce délai trop long. Il propose d'injecter, juste avant la perfusion, une « dose de charge » qui porte immédiatement la concentration à une valeur C_0. Quelle valeur de C_0 choisir pour que la concentration reste ensuite constante ?

Pour aller plus loin

Sans dose de charge, on arrête la perfusion au bout de 24 heures : la concentration vérifie alors $y' = -0{,}2y$. Combien de temps après l'arrêt la concentration redescend-elle sous 2 mg/L ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !