Équations différentielles
Problème de recherche : la perfusion

À l'hôpital, un patient reçoit un médicament par perfusion continue, à partir de l'instant $t = 0$ (en heures). On note $C(t)$ la concentration du médicament dans le sang (en mg/L). La perfusion apporte le médicament à un rythme constant, tandis que l'organisme l'élimine proportionnellement à sa concentration. On admet que C est solution de l'équation différentielle

$$(E) \ : \quad y' = -0{,}2\,y + 4, \qquad \text{avec } C(0) = 0.$$

Le médicament est efficace lorsque sa concentration dépasse 18 mg/L.

La mission

1. Déterminer l'expression de $C(t)$. Vers quelle valeur la concentration se stabilise-t-elle ?
2. Au bout de combien de temps le médicament devient-il efficace ?
3. Le médecin trouve ce délai trop long. Il propose d'injecter, juste avant la perfusion, une « dose de charge » qui porte immédiatement la concentration à une valeur C_0. Quelle valeur de C_0 choisir pour que la concentration reste ensuite constante ?

Pour aller plus loin

Sans dose de charge, on arrête la perfusion au bout de 24 heures : la concentration vérifie alors $y' = -0{,}2y$. Combien de temps après l'arrêt la concentration redescend-elle sous 2 mg/L ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Résolution

Solution constante. $y = k$ est solution si $0 = -0{,}2k + 4$, soit $k = 20$.

Solution générale. y est solution de (E) si et seulement si $y - 20$ est solution de $z' = -0{,}2z$, c'est-à-dire $y(t) = 20 + K\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ avec K réel. Condition initiale : $C(0) = 20 + K = 0$, donc $K = -20$:

$$C(t) = 20 - 20\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 20\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t}\right).$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0$, la concentration se stabilise vers **20 mg/L** (sans jamais l'atteindre) : c'est l'équilibre entre l'apport et l'élimination.

2. Le délai d'efficacité

$C(t) \geqslant 18 \iff \mathrm{e}^{-0{,}2t} \leqslant 0{,}1 \iff -0{,}2t \leqslant \ln 0{,}1 \iff t \geqslant 5\ln 10 \approx 11{,}5$.

Le médicament n'est efficace qu'au bout d'environ **11 h 30**.

3. La dose de charge

Avec $C(0) = C_0$: $C(t) = 20 + (C_0 - 20)\mathrm{e}^{-0{,}2t}$. Elle est constante si et seulement si $C_0 - 20 = 0$. Il faut une dose de charge qui porte immédiatement la concentration à $\boldsymbol{C_0}$ **= 20 mg/L** : la perfusion compense alors exactement l'élimination, et le médicament est efficace dès le début.

Pour aller plus loin

$C(24) = 20 - 20\mathrm{e}^{-4{,}8} \approx 19{,}84$ mg/L. Après l'arrêt, en notant s le temps écoulé depuis l'arrêt : $y(s) = 19{,}84\,\mathrm{e}^{-0{,}2s}$. $y(s) < 2 \iff \mathrm{e}^{-0{,}2s} < \dfrac{2}{19{,}84} \iff s > 5\ln\dfrac{19{,}84}{2} \approx 11{,}5$. La concentration redescend sous 2 mg/L environ **11 h 30 après l'arrêt**.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Équation $y' = ay + b$: solution particulière constante, solution générale, condition initiale.
- Équation $y' = ay$; allure des courbes et comportement à l'infini.