Fonction exponentielle
Problème de recherche : l'algorithme le plus rapide

Une entreprise de livraison doit optimiser chaque jour la tournée de ses camions entre n clients. Deux algorithmes sont proposés :

— l'algorithme A met $e^{n/10}$ microsecondes ;

— l'algorithme B met n^3 millisecondes.

On rappelle qu'une milliseconde vaut 1 000 microsecondes.

La mission

1. Comparer les durées des deux algorithmes pour 100 clients, puis pour 300 clients.
2. À partir de combien de clients l'algorithme B devient-il plus rapide que l'algorithme A ?
3. L'entreprise compte grandir beaucoup. Quel algorithme doit-elle choisir ? Justifier à l'aide d'une limite.

Pour aller plus loin

Les ordinateurs deviennent 1 000 fois plus rapides. Avec l'algorithme A, combien de clients de plus peut-on traiter dans le même temps ? Et avec l'algorithme B ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

On exprime tout en microsecondes : A met $f(n) = \mathrm{e}^{n/10}$ et B met $g(n) = 1\,000\,n^3$.

1. Pour 100 et 300 clients

— $n = 100$: $f(100) = \mathrm{e}^{10} \approx 22\,026$ µs, soit environ 0,02 s ; $g(100) = 10^9$ µs, soit 1 000 s (près de 17 minutes). **A est bien plus rapide.**

— $n = 300$: $f(300) = \mathrm{e}^{30} \approx 1{,}07 \times 10^{13}$ µs, soit environ $1{,}07 \times 10^7$ s (environ 124 jours !) ; $g(300) = 2{,}7 \times 10^{10}$ µs, soit 27 000 s (7,5 heures). **B est bien plus rapide.**

2. Le changement

On compare $\mathrm{e}^{n/10}$ et $1\,000n^3$ au tableau de valeurs : la différence $\mathrm{e}^{n/10} - 1\,000n^3$ est négative jusqu'à $n = 232$ et positive à partir de $n = 233$. **À partir de 233 clients**, l'algorithme B est plus rapide.

3. Le choix à long terme

$\dfrac{f(n)}{g(n)} = \dfrac{\mathrm{e}^{n/10}}{1\,000\,n^3} = \dfrac{1}{10^6} \times \dfrac{\mathrm{e}^X}{X^3}$ avec $X = \dfrac{n}{10}$. Par croissance comparée, $\dfrac{\mathrm{e}^X}{X^3} \to +\infty$ quand $X \to +\infty$, donc $\dfrac{f(n)}{g(n)} \to +\infty$: A devient infiniment plus lent que B. **L'entreprise doit choisir B** (ou utiliser A pour les petites tournées seulement).

Pour aller plus loin

— A : pendant une durée donnée, l'ordinateur fait 1 000 fois plus de calculs. On cherche m tel que $\mathrm{e}^{(n+m)/10} = 1\,000\,\mathrm{e}^{n/10}$, soit $\mathrm{e}^{m/10} = 1\,000$: au tableau de valeurs, $m \approx 69$. On ne gagne qu'**environ 69 clients**, quel que soit n.

— B : $(kn)^3 = 1\,000n^3$ donne $k = 10$: on peut traiter **10 fois plus de clients**.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Fonction exponentielle : propriétés algébriques, $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$.

— Croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.