# Fonction exponentielle
## Problème de recherche : les intérêts de Bernoulli

On place 1 € à un taux annuel de 100 %. Si les intérêts sont versés une fois par an, on obtient 2 € au bout d'un an. Si l'année est partagée en $n$ périodes de même durée, et qu'à chaque période on verse des intérêts au taux $\frac{100}{n}$ %, le capital au bout d'un an est

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

### La mission

1. Calculer $u_n$ pour des versements semestriels, mensuels, quotidiens. Peut-on devenir très riche en multipliant les versements ?
2. Démontrer que, pour tout réel $x$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.
3. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \mathrm{e}$.
4. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, puis que $\frac{\mathrm{e}}{1 + \frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$. Conclure.

### Pour aller plus loin

Avec un taux annuel de 5 % partagé en $n$ périodes, le capital au bout d'un an est $\left(1 + \frac{0{,}05}{n}\right)^n$. Conjecturer sa limite à la calculatrice, puis démontrer que $\left(1 + \frac{0{,}05}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{0{,}05}$.

### Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

# Éléments de correction

## 1. Des versements de plus en plus fréquents

$u_2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$ ; $u_{12} \approx 2{,}613$ ; $u_{365} \approx 2{,}7146$ ; $u_{1\,000\,000} \approx 2{,}718\,28$.
Le capital augmente avec $n$, mais de moins en moins : il semble ne jamais dépasser 2,72 €. On conjecture que $u_n$ tend vers $\mathrm{e} \approx 2{,}718\,28$.

## 2. Une inégalité de convexité

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée seconde est exp $> 0$). Sa courbe est au-dessus de ses tangentes, en particulier de la tangente en 0, d'équation $y = \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0(x-0) = 1+x$. Donc $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$ pour tout réel $x$.

## 3. Une majoration

Avec $x = \frac{1}{n}$ : $1 + \frac{1}{n} \leqslant \mathrm{e}^{1/n}$. Les deux membres sont positifs, on peut élever à la puissance $n$ :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(\mathrm{e}^{1/n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

## 4. Un encadrement

Avec $x = -\frac{1}{n+1}$ : $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} > 0$. En passant aux inverses :

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}, \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = u_n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi $\dfrac{\mathrm{e}}{1+\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$.
Quand $n$ tend vers $+\infty$, $\frac{\mathrm{e}}{1+\frac{1}{n}}$ tend vers e. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}$. Même avec des versements à chaque seconde, le capital ne dépasse jamais $\mathrm{e} \approx 2{,}72$ € : on parle d'intérêts « continus ».

## Pour aller plus loin

Pour $n = 1$, 12, 365 et 10 000, on obtient 1,05 ; 1,051 16 ; 1,051 27 ; 1,051 27. On conjecture la limite $\mathrm{e}^{0{,}05} \approx 1{,}051\,27$ : le taux réel obtenu est d'environ 5,13 %.
Avec $x = \frac{0{,}05}{n}$ dans l'inégalité de la question 2 : $1 + \frac{0{,}05}{n} \leqslant \mathrm{e}^{0{,}05/n}$, puis, en élevant à la puissance $n$, $\left(1+\frac{0{,}05}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{0{,}05}$. La minoration qui permet de conclure est admise ici.
Enrichissement historique : Jacques Bernoulli étudie ce problème d'intérêts en 1683. Le nombre e reçoit sa notation actuelle d'Euler au XVIIIe siècle.

## Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Propriétés algébriques de l'exponentielle : $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$.
- Convexité de l'exponentielle, position par rapport à une tangente.
- Théorème des gendarmes pour les suites.