Fonction exponentielle
Problème de recherche : la chaînette de Galilée

Un câble électrique est suspendu entre deux pylônes. Dans un repère bien choisi (unité : 10 m), on admet qu'il a la forme de la courbe de la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Cette courbe s'appelle une **chaînette**. Dans son ouvrage de 1638, Galilée suggérait qu'un câble suspendu prend une forme proche d'une parabole.

La mission

1. Démontrer que f est paire. Étudier ses variations et sa convexité sur $[-1\,;1]$. Quelle est la hauteur minimale du câble ?
2. On considère la parabole d'équation $y = g(x) = 1 + cx^2$, qui passe par le point le plus bas du câble. Déterminer c pour qu'elle passe aussi par les points d'attache du câble, d'abscisses -1 et 1.
3. Avec GeoGebra, tracer les deux courbes. Quel est le plus grand écart vertical entre elles ? L'erreur de Galilée était-elle visible à l'œil nu ?
4. Comparer les pentes des deux courbes au point d'attache d'abscisse 1.

Pour aller plus loin

Démontrer que, pour tout réel x, $f(x)^2 - f'(x)^2 = 1$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !