Fonction exponentielle
Problème de recherche : la chaînette de Galilée

Un câble électrique est suspendu entre deux pylônes. Dans un repère bien choisi (unité : 10 m), on admet qu'il a la forme de la courbe de la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Cette courbe s'appelle une **chaînette**. Dans son ouvrage de 1638, Galilée suggérait qu'un câble suspendu prend une forme proche d'une parabole.

La mission

1. Démontrer que f est paire. Étudier ses variations et sa convexité sur $[-1\,;1]$. Quelle est la hauteur minimale du câble ?
2. On considère la parabole d'équation $y = g(x) = 1 + cx^2$, qui passe par le point le plus bas du câble. Déterminer c pour qu'elle passe aussi par les points d'attache du câble, d'abscisses -1 et 1.
3. Avec GeoGebra, tracer les deux courbes. Quel est le plus grand écart vertical entre elles ? L'erreur de Galilée était-elle visible à l'œil nu ?
4. Comparer les pentes des deux courbes au point d'attache d'abscisse 1.

Pour aller plus loin

Démontrer que, pour tout réel x, $f(x)^2 - f'(x)^2 = 1$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Étude de la chaînette

$f(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = f(x)$: f est paire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

$f'(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$. La fonction exponentielle est croissante : si $x > 0$, alors $x > -x$, donc $e^{x} > e^{-x}$ et $f'(x) > 0$; si $x < 0$, $f'(x) < 0$. Ainsi f est décroissante sur $[-1\,;0]$ et croissante sur $[0\,;1]$, de minimum $f(0) = 1$.

$f''(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = f(x) > 0$: f est convexe.

Le point le plus bas du câble est à la hauteur 1, soit 10 m.

2. La parabole de Galilée

$g(0) = 1 = f(0)$ et, par parité, il suffit d'imposer $g(1) = f(1)$: $1 + c = \frac{e+e^{-1}}{2}$, d'où

$$c = \frac{e + e^{-1}}{2} - 1 \approx 0{,}5431.$$

3. L'écart entre les courbes

Dans GeoGebra, on saisit `f(x)=(exp(x)+exp(-x))/2`, `g(x)=1+c*x^2` puis `h(x)=g(x)-f(x)` et on cherche l'extremum de h sur $[0\,;1]$. On trouve un maximum d'environ 0,011 pour $x \approx \pm 0{,}71$, soit environ 11 cm pour un câble de 20 m de portée.

La parabole est très légèrement au-dessus de la chaînette : l'écart est invisible à l'œil nu, ce qui explique que la question ait été longtemps discutée.

4. Les pentes au point d'attache

$f'(1) = \frac{e-e^{-1}}{2} \approx 1{,}175$ et $g'(1) = 2c \approx 1{,}086$. La chaînette arrive plus raide au pylône : les deux courbes ne sont pas identiques.

Pour aller plus loin

$$f(x)^2 - f'(x)^2 = \frac{(e^{x} + e^{-x})^2 - (e^{x} - e^{-x})^2}{4} = \frac{4\,e^{x}e^{-x}}{4} = 1.$$

Enrichissement historique : en 1690, Jacques Bernoulli lance le défi de trouver la courbe d'une chaîne suspendue. En 1691, Leibniz, Huygens et Jean Bernoulli en publient la solution. Le nom « chaînette » vient du latin *catena*, la chaîne.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Dérivée de $x \mapsto e^{kx}$, croissance de l'exponentielle.
- Relation $e^{x}e^{-x} = 1$.
- Convexité (chapitre précédent).