Loi géométrique
Problème de recherche : la carte rare

Dans un jeu de cartes à collectionner, chaque booster (paquet de cartes) coûte 5 €. Un booster contient la carte rare « Dragon d'argent » avec une probabilité de $\frac{1}{20}$, indépendamment des autres boosters. Tom achète des boosters un par un, jusqu'à obtenir cette carte.

La mission

1. Quelle est la probabilité que Tom obtienne la carte exactement au 5^{e} booster ?
2. Combien de boosters Tom doit-il prévoir d'acheter pour avoir au moins 90 % de chances d'obtenir la carte ?
3. Son amie Inès a déjà ouvert 30 boosters sans trouver la carte. Elle affirme : « Maintenant, je suis sûre de l'avoir bientôt, j'ai beaucoup plus de chances que Tom. » A-t-elle raison ?

Pour aller plus loin

Un site de revente propose la carte à 60 €. Vaut-il mieux l'acheter directement ou acheter des boosters ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

On note X le rang du premier booster contenant la carte. On répète, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « le booster contient la carte », de probabilité $p = 0{,}05$, jusqu'au premier succès : X suit la **loi géométrique** de paramètre 0,05, et $P(X = k) = 0{,}95^{k-1} \times 0{,}05$.

1. Au 5e booster

$P(X = 5) = 0{,}95^4 \times 0{,}05 \approx \mathbf{0{,}041}$.

2. Prévoir 90 % de chances

$P(X \leqslant n) = 1 - P(X > n) = 1 - 0{,}95^n$ (les n premiers boosters ne contiennent pas la carte). On résout $1 - 0{,}95^n \geqslant 0{,}9 \iff 0{,}95^n \leqslant 0{,}1 \iff n \ln 0{,}95 \leqslant \ln 0{,}1 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}95} \approx 44{,}9$ (on divise par $\ln 0{,}95 < 0$).
Tom doit prévoir **45 boosters**, soit 225 €.

3. Après 30 échecs

La loi géométrique est **sans mémoire** : $P_{X>30}(X > 30 + k) = P(X > k)$. Sachant qu'Inès a ouvert 30 boosters sans succès, la loi du nombre de boosters supplémentaires est la même que pour Tom qui commence. Les boosters « ne se souviennent pas » des échecs passés. **Inès a tort** : elle a exactement les mêmes chances que Tom.

Pour aller plus loin

L'espérance de X est $E(X) = \dfrac{1}{p} = 20$: en moyenne, il faut 20 boosters, soit **100 €**.
L'achat direct à 60 € est plus intéressant, sauf si l'on tient aussi aux autres cartes des boosters. De plus, la dépense est très variable : il y a environ 36 % de risque ($0{,}95^{20}$) de devoir ouvrir plus de 20 boosters.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Loi géométrique : reconnaissance, calcul de probabilités, espérance $\frac{1}{p}$.
- Absence de mémoire ; recherche d'un seuil avec $\ln(q^n) = n \ln q$.