Loi géométrique
Problème de recherche : le premier qui fait six

Alice et Bruno lancent un dé équilibré à tour de rôle, Alice en premier. Le premier qui obtient un six gagne la partie. On note X le rang du lancer où apparaît le premier six (les lancers d'Alice ont les rangs 1, 3, 5...).

La mission

1. Quelle est la loi de X ? Quelle est la probabilité qu'Alice gagne à son premier lancer ? À son deuxième lancer ? Quelle est la probabilité que la partie dure plus de 10 lancers ?
2. Écrire un programme Python qui simule un grand nombre de parties et estime la probabilité qu'Alice gagne. Quelle conjecture peut-on faire ?
3. On note a_n la probabilité qu'Alice gagne en l'un de ses n premiers lancers. Démontrer que

$$a_n = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{25}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}\right),$$

   puis calculer la limite de (a_n). Conclure.
4. Quel est le nombre moyen de lancers d'une partie ?

Pour aller plus loin

Une troisième joueuse, Chloé, joue après Bruno. Déterminer la probabilité de gain de chacun des trois joueurs.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !



Éléments de correction

1. La loi de X

Les lancers sont des épreuves de Bernoulli indépendantes de succès « six », de probabilité $\frac{1}{6}$. X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$: $P(X=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}$.
Alice gagne à son premier lancer : $P(X=1)=\frac{1}{6}$. À son deuxième lancer : $P(X=3)=\frac{25}{36}\times\frac{1}{6}=\frac{25}{216}\approx 0{,}116$.
La partie dure plus de 10 lancers : $P(X>10)=\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\approx 0{,}162$.

2. Simulation

```
from random import randint
def partie():
    k = 1
    while randint(1, 6) != 6:
        k = k + 1
    return k % 2 == 1        # True si Alice gagne
N = 100000
print(sum(partie() for i in range(N)) / N)
```

On obtient des valeurs proches de 0,545 : Alice semble avantagée.

3. La probabilité exacte

Alice gagne à son j-ième lancer lorsque $X=2j-1$, avec la probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^{2j-2}\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\left(\frac{25}{36}\right)^{j-1}$. Ces événements sont incompatibles, d'où l'expression de a_n.
La somme entre parenthèses est celle des termes $u_0,\dots,u_{n-1}$ de la suite géométrique $u_j=\left(\frac{25}{36}\right)^j$:

$$a_n=\frac{1}{6}\times\frac{u_n-u_0}{q-1}=\frac{1}{6}\times\frac{\left(\frac{25}{36}\right)^n-1}{\frac{25}{36}-1}=\frac{1}{6}\times\frac{36}{11}\left(1-\left(\frac{25}{36}\right)^n\right).$$

Comme $0<\frac{25}{36}<1$, a_n tend vers $\frac{36}{66}=\frac{6}{11}\approx 0{,}545$. Alice gagne avec la probabilité $\frac{6}{11}$ et Bruno avec la probabilité $\frac{5}{11}$: celui qui commence est avantagé.

4. Durée moyenne

L'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est $\frac{1}{p}$: une partie dure en moyenne 6 lancers.

Pour aller plus loin

Avec trois joueurs, Alice gagne lorsque $X\in\{1;4;7\dots\}$, et le même calcul avec la raison $\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$ donne $\frac{1}{6}\times\frac{216}{91}=\frac{36}{91}$. Bruno a toujours un lancer de retard, d'où $\frac{5}{6}\times\frac{36}{91}=\frac{30}{91}$, et Chloé $\frac{25}{91}$. On vérifie que $36+30+25=91$.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Loi géométrique, espérance $\frac{1}{p}$.
- Somme de termes d'une suite géométrique et limite de q^n.
- Simulation avec Python.