Primitives et intégration
Problème de recherche : les panneaux solaires de la maison

Par une belle journée de printemps, la puissance (en kW) produite par les panneaux solaires d'une maison, t heures après minuit, est modélisée par

$$P(t) = -0{,}1t^2 + 2{,}4t - 10{,}8 \qquad \text{pour } t \in [6\,;\,18],$$

et par 0 le reste de la journée. L'énergie produite (en kWh) entre les instants a et b est $\displaystyle\int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t$.

La mission

1. Quelle énergie les panneaux produisent-ils sur la journée ? Quelle est la puissance moyenne produite entre 6 h et 18 h ?
2. Pendant la journée, la maison consomme une puissance constante de 1,2 kW. Le surplus de production est revendu au réseau électrique. Pendant quelle période y a-t-il un surplus ? Quelle énergie est revendue ?

Pour aller plus loin

Plutôt que de revendre le surplus, la famille envisage d'acheter une batterie de 10 kWh pour le consommer le soir. Cette batterie serait-elle remplie ? Le soir, la maison consomme 0,8 kW de 18 h à 23 h : la batterie suffirait-elle ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. L'énergie de la journée

On remarque que $P(t) = -0{,}1(t-6)(t-18)$: P est positive sur $[6;18]$ et maximale en $t = 12$ ($P(12) = 3{,}6$ kW). Une primitive de P est $F(t) = -\dfrac{0{,}1}{3}t^3 + 1{,}2t^2 - 10{,}8t$, et $F(18) = -194{,}4 + 388{,}8 - 194{,}4 = 0$ et $F(6) = -7{,}2 + 43{,}2 - 64{,}8 = -28{,}8$, donc

$$\int_6^{18} P(t)\,\mathrm{d}t = F(18) - F(6) = 0 - (-28{,}8) = 28{,}8.$$

Les panneaux produisent **28,8 kWh** sur la journée.

Puissance moyenne : $\dfrac{1}{18-6}\displaystyle\int_6^{18} P(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{28{,}8}{12} = \mathbf{2{,}4\ kW}$.

2. Le surplus revendu

Il y a surplus lorsque $P(t) > 1{,}2 \iff -0{,}1t^2 + 2{,}4t - 12 > 0 \iff t^2 - 24t + 120 < 0$.

Discriminant : $576 - 480 = 96$; racines $t_1 = 12 - \sqrt{24} \approx 7{,}10$ et $t_2 = 12 + \sqrt{24} \approx 16{,}90$.

Surplus **d'environ 7 h 06 à 16 h 54**.

Énergie revendue : $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \big(P(t) - 1{,}2\big)\,\mathrm{d}t$. À la calculatrice (ou avec une primitive), on trouve environ **15,7 kWh**, soit plus de la moitié de la production.

Pour aller plus loin

Le surplus (environ 15,7 kWh) dépasse 10 kWh : **la batterie serait remplie**. Le soir, la maison consomme $0{,}8 \times 5 = 4$ kWh : la batterie suffit largement. Une batterie de 4 kWh suffirait même, par une journée ensoleillée comme celle-ci (mais pas forcément par temps couvert).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Primitives d'une fonction polynôme ; calcul d'intégrales ; valeur moyenne.
- Intégrale et aire entre deux courbes ; interprétation (énergie = intégrale de la puissance).